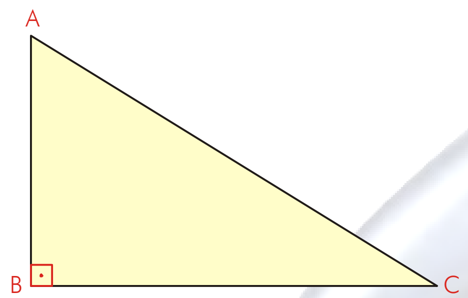
TRIGONOMETRIA

1. TRIÂNGULO RETÂNGULO

1.1. Definição

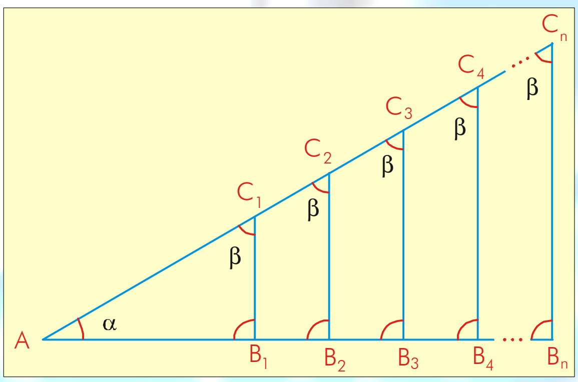
Define-se como triângulo retângulo a qualquer triângulo que possua um de seus ângulos internos reto (medida de 90º).

◎ Representação e Elementos



Catetos: lados AB e BC.
Hipotenusa: lado AC (oposto ao ângulo reto).

2. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



Observe que os triângulos $(\Delta AB_1C_1, \Delta AB_2C_2, \ldots, \Delta AB_nC_n)$ são todos semelhantes entre si, critério AAr. Logo, as razões envolvendo seus elementos correspondentes é constante.

2.1. Razões usadas com maior freqüência

I) $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{B_1C_1}{AC_1} = \dfrac{B_2C_2}{AC_2} = \ldots = \dfrac{B_nC_n}{AC_n}$,

essa razão é denominada seno de α e indicada por senα.

II)

$\dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{AB_2}{AC_2} = \ldots = \dfrac{AB_n}{AC_n}$,

essa razão é denominada cosseno de α e indicada por cosα.

III) $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{B_2C_2}{AB_2} = \ldots = \dfrac{B_nC_n}{AB_n}$,

essa medida é denominada de tangente de α e indicada por tgα.

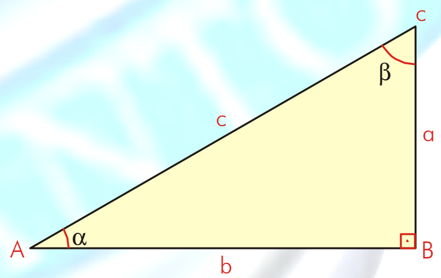
2.2. Demais Razões

◎ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, com $\cos\alpha \neq 0$, a secante de α representa o inverso multiplicativo do cosseno de α, desde que o mesmo seja diferente de zero.

◎ $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, com $tg\alpha \neq 0$, a cotangente de α representa o inverso multiplicativo da tangente de α, desde que a mesma seja diferente de zero.

◎ $\cos\sec\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$, com $sen\alpha \neq 0$, a cossecante de α representa o inverso multiplicativo do seno de α, desde que o mesmo seja diferente de zero.

2.3. Conseqüências da Definição



Relações:

$$sen\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta (I)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = sen\beta (II)$$

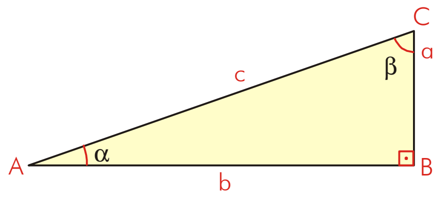
$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{tg\beta} (III)$$

Conclui-se, a partir das relações (I), (II) e (III), que:

◎ $Sen\alpha = Cos(90° - \alpha)$, o seno de um ângulo agudo é igual ao Cosseno de seu complemento.

◎ $Tg\alpha = \dfrac{1}{tg(90° - \alpha)}$, a tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso multiplicativo da tangente de seu complemento.

2.4. Relações Fundamentais



◎ $\left.\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \dfrac{a}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \end{array}\right\} \rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^{(I)}$, lembre-se que $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras).

◎ $\left.\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \dfrac{a}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \text{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \rightarrow \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

◎ Dividindo a relação (I) por $\text{sen}^2\alpha$, temos: $1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha$.

◎ Dividindo a relação (I) pois $\cos^2\alpha$, temos: $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$.

2.5. Ângulos Notáveis

Trabalhando com o triângulo eqüilátero e o triângulo isósceles retângulo, conseguimos calcular os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos abaixo. Esses ângulos são denominados ângulos notáveis.

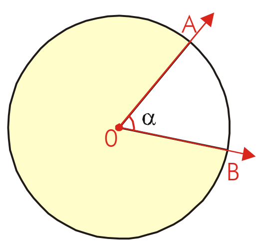
α	30º	45º	60º
Senα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. ÂNGULO CENTRAL

Um ângulo é denominado de central quando possuir o vértice no centro da circunferência.

◎ A medida de um ângulo central é igual à medida de seu arco correspondente.

◎ Ilustração:



$\alpha = \widehat{AB}$

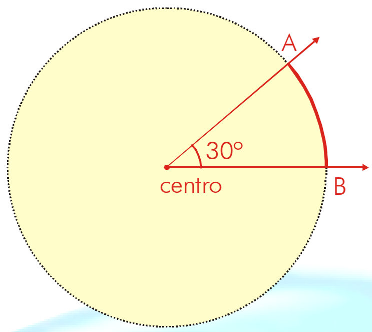
4. UNIDADES DE MEDIDAS DO ÂNGULO

4.1. Unidade Grau

Define-se como 1 (um) grau, a medida do ângulo central cujo arco correspondente representa $\frac{1}{360}$ partes da circunferência.

Exemplo:

E.1)



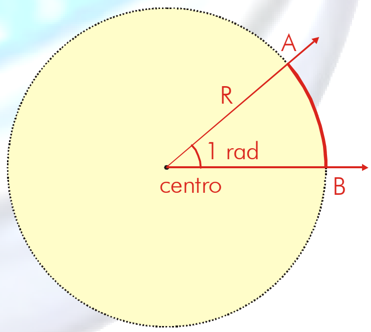
Comprimento do arco AB indicado representa $\frac{30}{360}$ partes da circunferência, visto que o ângulo central correspondente é 30º.

4.2. Unidade Radiano

Define-se como 1 radiano (unidade rad) a medida do ângulo central, cujo arco correspondente representa o mesmo comprimento do raio dessa circunferência.

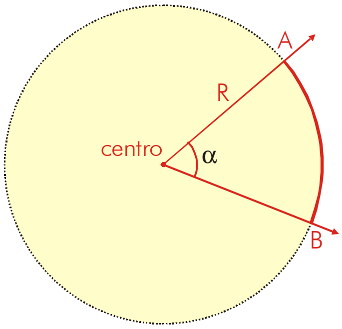
Exemplo:

E.1)



O comprimento do arco AB é igual à medida do raio da circunferência.

Conclui-se, pela definição acima, que o ângulo central em radiano representa a razão entre o comprimento de seu arco correspondente e a medida do raio. Observe a seguir.



$$\alpha = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{R}$$

Exemplo:

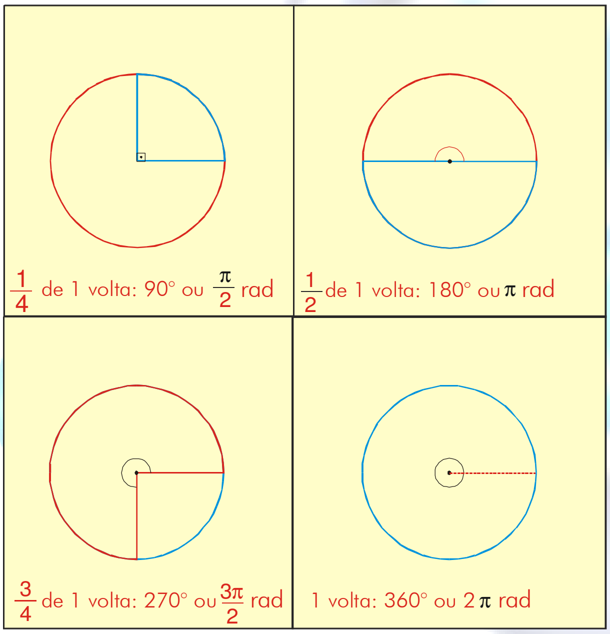
E.1) Determine a medida do ângulo de uma volta em radiano.

Resolução:

O comprimento da circunferência de raio R é $2\pi R$. Logo, $\alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{rad}$.

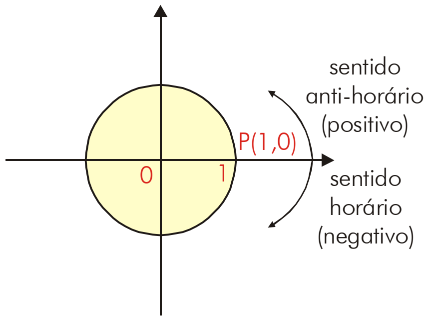
E.2) A ilustração representa os arcos de 90º, 180º, 270º e 360º.

Resolução:

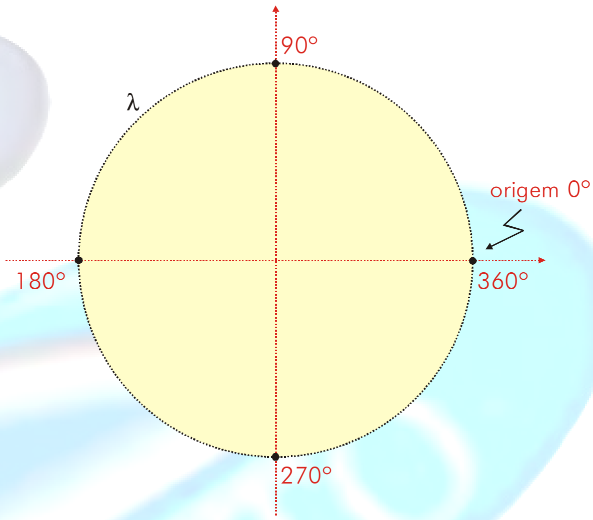


5. *CICLO TRIGONOMÉTRICO*

Define-se como ciclo trigonométrico a toda circunferência orientada, de raio unitário e centro no sistema de coordenadas cartesianas. Por convenção, o ponto $P(1,0)$ é a origem da orientação, o sentido positivo é o sentido anti-horário e negativo no sentido horário. Observe a representação.



5.1. Elementos



Considere o ciclo trigonométrico acima.

◎ Os eixos cartesianos limitam a circunferência trigonométrica (λ) em quatro partes denominadas quadrantes e numeradas de 1 a 4, no sentido anti-horário.

1º quadrante: arcos entre 0º e 90º, medidos a partir da origem.

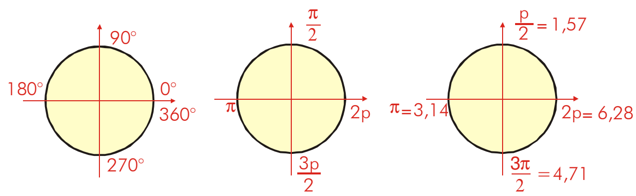
2º quadrante: arcos entre 90º e 180º, medidos a partir da origem.

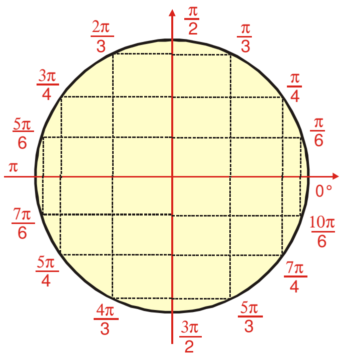
3º Quadrante: arcos entre 180º e 270º, medidos a partir da origem.

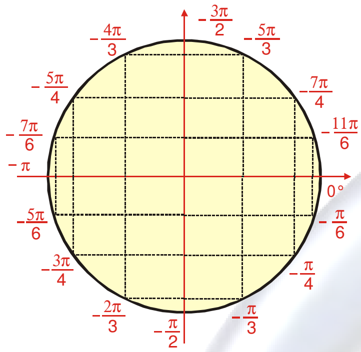
4º Quadrante: arcos entre 270º e 360º, medidos a partir da origem.

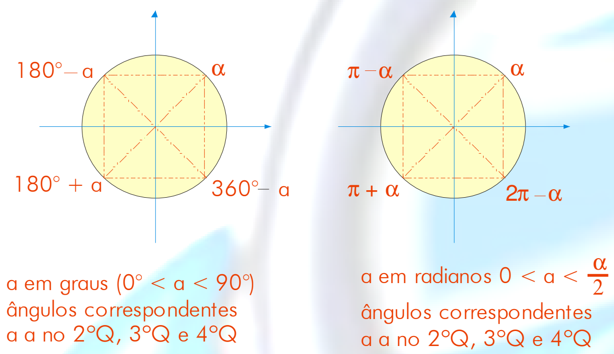
Exemplos:

E.1)









6. ARCOS CÔNGRUOS

Como os arcos no ciclo trigonométrico possuem a mesma origem, então dois arcos no ciclo são côngruos quando a diferença entre suas medidas possui a forma $2k\pi$ (com $k \in \mathbb{Z}$), ou seja, podemos expressar todos os arcos côngruos a α, no ciclo, na forma $\alpha + k \cdot 2\pi$ (com $k \in \mathbb{Z}$). De modo análogo, representamos os arcos côngruos ao ângulo α, em graus, na forma $\alpha + k360°$ (com $k \in \mathbb{Z}$).

Exemplo:

E.1) Os arcos $-330°, 390°$ e $-690°$ são congruentes ao arco de 30º, pois as diferenças $30 - (-330°)$, $30° - 390°$ e $-690° - 30°$ são múltiplas de 360º.

E.2) Os arcos $-10°$ e $710°$ são côngruos ao arco 350º, pois $-10° = 350° - 1.360°$ e $710° = 350° + 1.360°$.

7. PRIMEIRA DETERMINAÇÃO POSITIVA

Um arco θ é chamado de primeira determinação positiva ao arco α, se satisfaz as condições abaixo:

I) θ é côngruo a α.

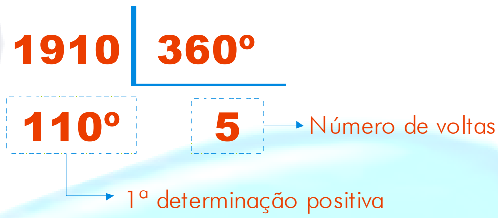
II) 0 rad ≤ θ < 2π rad.

Exemplo:

E.1) 30º é a primeira determinação positiva dos arcos 390º, pois, $390° = 30° + 1 \cdot 360°$.

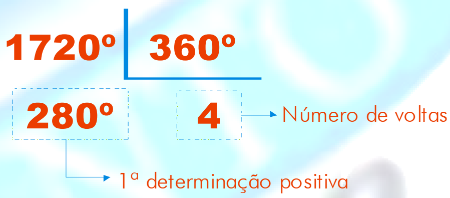
E.2) Determine a primeira determinação positiva do ângulo 1910º.

Resolução



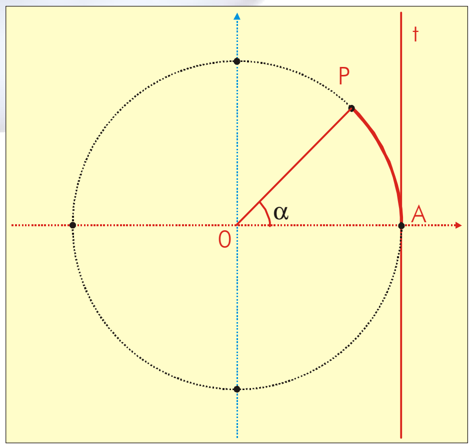
E.3) Encontre a primeira determinação positiva do ângulo 1720º.

Resolução:



8. DEFINIÇÃO DE SENO, COSSENO E TANGENTE DE UM ARCO

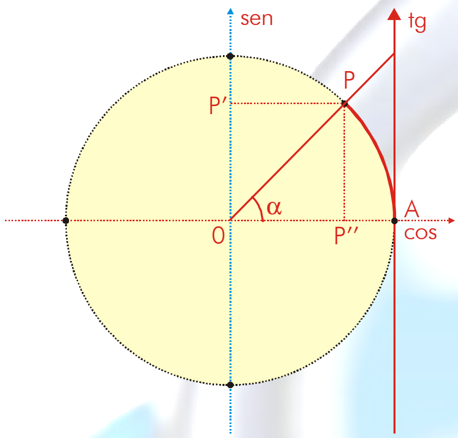
Considere no ciclo trigonométrico um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α e uma reta t paralela ao eixo das ordenadas, que passa pelo ponto A, origem do ciclo. Observe a figura.



◎ Define-se como seno do arco $\overset{\frown}{AP}$ (indicado por senα) a medida algébrica do segmento OP’, em que P’ é a projeção ortogonal do ponto P no eixo vertical. O eixo vertical será chamado de eixo dos senos.

- Define-se como cosseno do arco $\overset{\frown}{AP}$ (indicado por cosα) a medida algébrica do segmento OP'', em que P'' é a projeção ortogonal do P no eixo horizontal. O eixo horizontal será chamado de eixo dos cossenos.
- Define-se como tangente do arco $\overset{\frown}{AP}$ (indicado por tgα) a medida algébrica do segmento AT, em que T é o ponto de intersecção da reta suporte do raio OP com a reta t. O eixo t será chamado de eixo das tangentes.

As definições acima podem ser ilustradas na figura a seguir.



Sen α= medida algébrica de OP'.
Cos α = medida algébrica de OP''.
Tg α = medida algébrica de AT.

Observação:

Se a reta suporte de OP coincidir com a reta suporte do eixo dos senos, não teremos o ponto T, pois $\overline{OP}//t$. A tangente de um arco só está definida se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

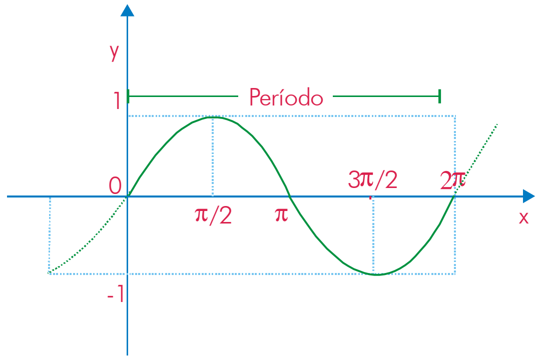
9. FUNÇÃO SENO

9.1. Definição

Define-se como função seno a toda função $f: \underbrace{\mathbb{R}}_{D(f)} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{CD(f)}$ que associa a cada $x \in D(f)$ um número $f(x) \in CD(f)$ na forma:

$$f(x) = \operatorname{sen} x\,.$$

9.2. Gráfico



9.3. Propriedades

- Os valores máximo e mínimo da função seno são, respectivamente, iguais a 1 e –1.
- A função seno é positiva no 1º e 2º quadrante e negativa no 3º e 4º quadrante.
- A função seno e periódica de período igual a 2π.

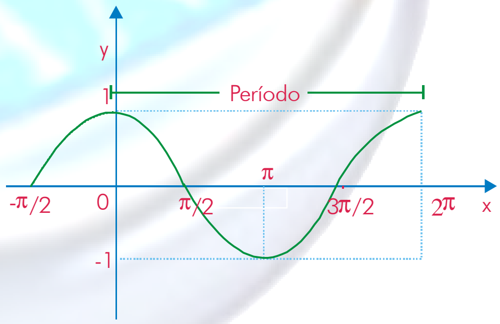
10. FUNÇÃO COSSENO

10.1. Definição

Define-se como função cosseno a toda função $f: \underbrace{\mathbb{R}}_{D(f)} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{CD(f)}$ que associa a cada $x \in D(f)$ um número $f(x) \in CD(f)$ na forma:

$$f(x) = \cos x\,.$$

10.2. Gráfico



10.3. Propriedades

- Os valores máximo e mínimo da função cosseno são, respectivamente, iguais a 1 e –1.
- A função cosseno é positiva no 1º e 4ºquadrante e negativa no 2º e 3º quadrante..
- A função cosseno é periódica de período igual a 2π.

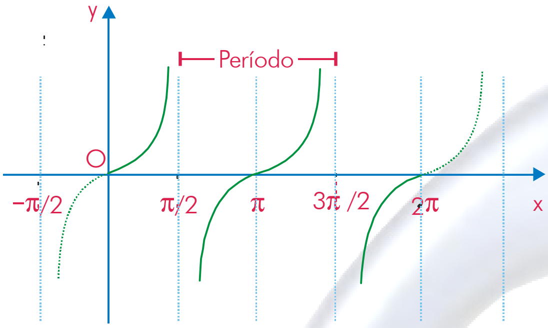
11. FUNÇÃO TANGENTE

11.1. Definição

Define-se como função tangente a toda função $f:\underbrace{\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}}_{D(f)} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{CD(f)}$ que associa a cada $X \in D(f)$ um número $f(x)$ na forma:

$$f(x) = tgx .$$

11.2. Gráfico:



11.3. Propriedade:

- A tangente é positiva nos quadrantes 1º e 3º e negativa no 2º e 4º quadrante.
- O período da função tangente é π.
- A imagem da função tangente é o conjunto dos reais.

12. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS E AUXILIARES

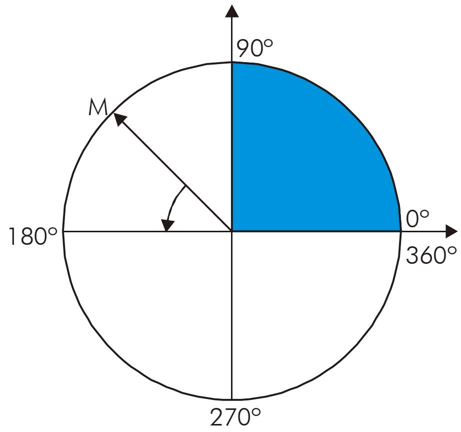
Se x é um ângulo agudo num triângulo retângulo. De acordo com as definições das funções trigonométricas, podemos verificar que:

F.1) $sen^2 x + cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} sen^2 x = 1 - cos^2 x \\ cos^2 x = 1 - sen^2 x \end{cases}$
F.2) $tgx = \dfrac{senx}{cos x}$
F.3) $cotgx = \dfrac{1}{tgx} = \dfrac{cos x}{senx}$
F.4) $sec x = \dfrac{1}{cos x}$
F.5) $cossec x = \dfrac{1}{senx}$
A.1) $sec^2 x = 1 + tg^2 x$
A.2) $cossec^2 x = 1 + cotg^2 x$

13. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

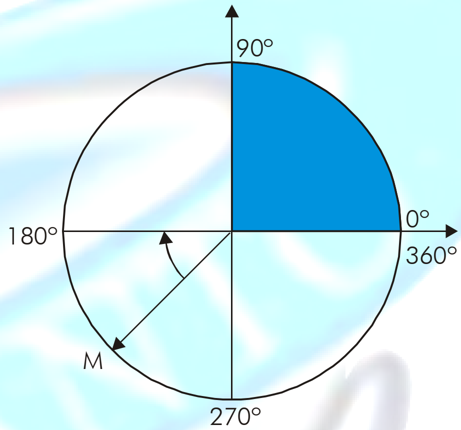
Reduzir um arco do 2ºQ, 3ºQ ou 4ºQ. ao 1ºQ é obter um novo arco, entre 0º e 90º (1ºQ), que possui os mesmos valores para as funções trigonométricas que o arco dado ao mesmo sinal.

Arco no 2º quadrante



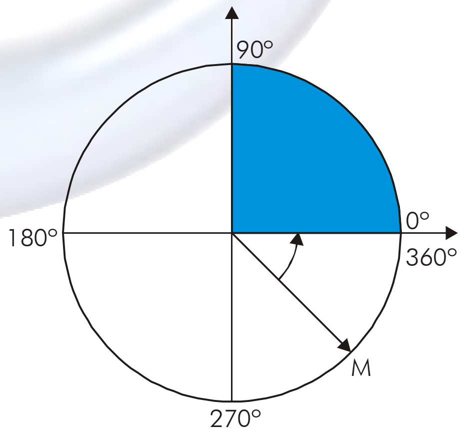
- Quanto falta para 180º?
- Verifique o sinal da função.

Arco no 3º quadrante



- Quanto passa de 180º?
- Verifique o sinal da função.

Arco no 4º quadrante



- Quanto falta para 360º?
- Verifique o sinal da função.

14. ARCOS COMPLEMENTARES

Sejam α e β dois ângulos complementares $(\alpha+\beta=90^{\circ})$ pertencentes ao 1º quadrante, então:

$$\text{sen}\alpha=\cos\beta$$

Exemplos:

$\text{sen}30^{\circ}=\frac{1}{2}$ e $\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$, portanto:

$$\text{sen}30=\cos 60^{\circ}$$

em que 30º e 60º são arcos complementares.

Observação:

Utilizando as relações fundamentais e as funções inversas, concluímos que essa mesma relação é válida também para as demais funções trigonométricas. Assim:

$$\text{Se } \alpha+\beta=90^{\circ}\begin{cases}\text{sen}\alpha=\cos\beta\\ \text{tg}\alpha=\text{cotg}\beta\\ \sec\alpha=\text{cossec}\beta\end{cases}$$

15. MENOR DETERMINAÇÃO DE UM ARCO

Um arco, cujo valor ultrapassa 360º, é representado, na circunferência trigonométrica, por um certo número de voltas múltiplo de 360º e outro número menor que 360º, que é a menor determinação deste arco.

Veja, como exemplos, os arcos de 750º e 390º.

$$750^{\circ}=\underbrace{720^{\circ}}_{\substack{2.360^{\circ}\\ \text{(2 voltas)}}}+\underbrace{30^{\circ}}_{\substack{\text{M.D.}\\ \text{(menor determinação)}}}$$

Observe como se calcula a menor determinação:

$$\begin{array}{r|l} 750^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline 30^{\circ} & \text{(2 voltas)} \end{array}$$

$$390^{\circ}=\underbrace{360^{\circ}}_{\substack{1.360^{\circ}\\ \text{(1 volta)}}}+\underbrace{30^{\circ}}_{\substack{\text{M.D.}\\ \text{(menor determinação)}}}$$

Observação:

- Os arcos de 390º e 750º são denominados arcos côngruos a 30º, porque suas menores determinações são iguais.

- Se o arco for negativo e maior que 360º, procedemos da mesma forma e somamos a menor determinação (negativa) com 360º.

- Eventualmente, a menor determinação de um arco deve ser reduzida ao 1º quadrante.

16. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

Conhecendo os valores de senos, cossenos e tangentes dos ângulos notáveis, podemos calcular essas razões para alguns ângulos não notáveis.

Veremos, então, algumas expressões que nos permitem encontrar o seno, o cosseno e a tangente de um arco, transformando-o em uma soma ou uma diferença de arcos. Dados dois arcos α e β, temos:

◎ $\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\,.\cos\beta+\text{sen}\,\beta\,.\cos\alpha$

◎ $\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\,.\cos\beta-\text{sen}\,\beta\,.\cos\alpha$

◎ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,.\text{sen}\,\beta$

◎ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,.\text{sen}\,\beta$

◎ $\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$

◎ $\text{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$

Condição de existência da tangente:

$\alpha,\beta\neq\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ rad.

17. ARCO DUPLO

Estas expressões nos permitem encontrar o seno, o cosseno e a tangente de arcos que medem o dobro de um arco α dado.

◎ $\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha$

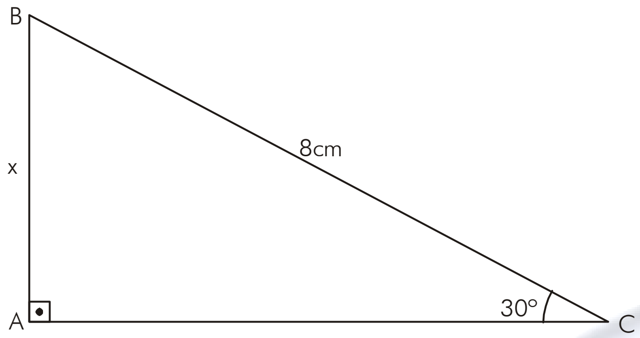
◎ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$

◎ $\text{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ ou $\cos 2\alpha=1-2\,\text{sen}^2\alpha$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Encontre x, na figura abaixo:



Resolução:

Cateto oposto ao ângulo 30º=x (hipotenusa) h=8cm (maior lado).

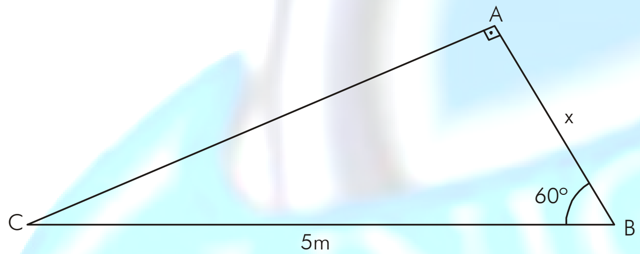
$sen\theta = \dfrac{co}{h}$

$sen30° = \dfrac{x}{8}$ (vide tabela de valor do sen 30º)

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{8} \rightarrow x = 4$

---

2 Encontre x na figura abaixo:



Resolução:

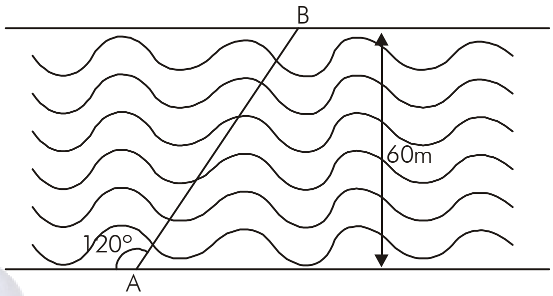
X = cateto adjacente

$\cos\theta = \dfrac{x}{5}$ (vide tabela cos60º)

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{5} \rightarrow x = 2{,}5$

EXERCÍCIOS

1 **(UFRS)** Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120º com a margem do rio.



Sendo a largura do rio 60m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

a) $40\sqrt{2}$
b) $40\sqrt{3}$
c) $45\sqrt{3}$
d) $50\sqrt{3}$
e) $60\sqrt{3}$

---

2 **(UFPA)** Num triângulo retângulo ABC tem-se $\hat{A} = 90$, AB=45 e BC=6. Pede-se a tangente do ângulo B.

a) $\dfrac{11}{5}$
b) $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$
c) $\dfrac{6}{5}$
d) $\dfrac{5}{\sqrt{11}}$
e) $\dfrac{6}{5}$

---

3 **(AAP)** Um arame de 18 metros de comprimento é esticado do nível do solo (suposto horizontal) ao topo de um poste vertical. Sabendo que o ângulo formado pelo arame com o solo é de 30º, calcule a altura do poste.

a) 18m.
b) 36m.
c) 9m.
d) 4,5m.
e) Nenhuma.

---

4 **(UNISANTOS)** Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de 60º, uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 40m, esse ângulo é de 30º. A largura do rio é:

a) 5m
b) $10\sqrt{3}\text{m}$
c) 20m
d) $20\sqrt{3}\text{m}$
e) Nenhuma.

---

5 Converta $\frac{5\pi}{3}$ em graus:

a) 450º
b) 320º
c) 300º
d) 270º
e) 250º

---

6 Converta 15º em radianos:

a) $\frac{\pi}{10}\text{rad}$
b) $\frac{\pi}{12}\text{rad}$
c) $\frac{2\pi}{15}\text{rad}$
d) $\frac{\pi}{13}\text{rad}$
e) $\frac{\pi}{7}\text{rad}$

---

7 **(ITA)** Transformando 12º em radianos, obtemos:

a) $\frac{\pi}{15}\text{rad}$
b) $\frac{15}{\pi}\text{rad}$
c) $\frac{\pi}{30}$
d) $\frac{2\pi}{15}\text{rad}$
e) 12rad

---

8 **(PUC)** Dê o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 12 horas e 15 minutos.

a) 90º
b) 85
c) 82º30'
d) 80º
e) 136º

---

9 **(UFPA)** Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

a) $\frac{16\pi}{9}$
b) $\frac{5\pi}{3}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{10\pi}{3}$
e) $\frac{7\pi}{3}$

---

10 Simplifique a expressão $y = \frac{\text{tgx}}{\cot\text{gx}} \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$

a) sen^2x
b) 1
c) $\text{sen}^2\text{x}.\cos^2\text{x}$
d) $\cos^2\text{x}$
e) tg^2x

---

11 **(PUC)** O valor numérico da expressão

$y = \cos 4x + \text{sen}2x + \text{tg}2x - \sec 4x$ para $x = \frac{\pi}{2}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

---

12 **(FGV)** Simplificando a expressão

$\frac{\cos^2 x - \cot gx}{\text{sen}^2 x - \text{tgx}}$, obtemos:

a) $\sec^2\text{x}$
b) sen^2x
c) tg^2x
c) $\cos^2\text{x}$
d) $\cos^2\text{x}$
e) cotg^2x

---

13 Reduza tg300º ao 1º quadrante:

a) cotg 30º
b) tg 60º
c) –tg60º
d) cotg30º
e) Nenhuma.

---

14 **(UFPA)** A menor determinação positiva de um arco de 1000º é:
a) 270º
b) 280º
c) 290º
d) 300º
e) 310º

---

15 O valor de sen70º é:
a) sen20º
b) tg20º
c) –sen20º
d) –cos20º
e) cos20º

---

16 Sendo $x = \frac{2\pi}{3}$, calcule o valor da expressão $y = \frac{3\cos x - 2\text{sen}x + \text{tg}2x}{\text{tg}x - 2\text{sen}2x + \cos 4x}$.
a) –3
b) 3
c) 3/2
d) 3/4
e) –3/4

---

17 **(PUC)** O valor de sen1200º é igual a:
a) cos60º
b) –sen60º
c) cos30º
d) –sen30º
e) cos45º

---

18 Sabendo que $\text{sen}x = \frac{3}{5}$ e $\text{sen}y = \frac{12}{13}$, com $x, y \in$ 1º quadrante. Determine o valor de $\cos(x - y)$:
a) $\frac{65}{53}$
b) $\frac{56}{65}$
c) $-\frac{56}{65}$
d) $\frac{63}{65}$
e) Nenhuma.

GABARITO

1 B
2 B
3 C
4 C
5 A
6 B
7 A
8 C
9 B
10 A
11 B
12 D
13 C
14 B
15 E
16 C
17 C
18 B