

A matemática no pôquer: Explorando problemas de probabilidade

Mathematics of poker: Exploring probability problems

Seldomar Jeske Ehlert* e Leandro Sebben Bellicanta

Instituto Federal Sul-rio-grandense - Campus Pelotas, RS, Brasil

Resumo

O presente trabalho propõe a utilização do jogo de pôquer como motivação para o estudo de probabilidade na disciplina de Matemática do Ensino Médio. Juntamente com as regras básicas do jogo de pôquer, na modalidade Texas Hold'em, é apresentada uma sequência de atividades didáticas envolvendo situações específicas de jogo que procuram desenvolver no estudante as técnicas de análise combinatória e a habilidade no cálculo de probabilidades de eventos equiprováveis.

Palavras-chave: *Ensino da matemática. Pôquer. Problemas de probabilidade*

Abstract

This work proposes the use of the poker game as motivation for the study of probability in high school math classes. Along with the basic rules of the Texas Hold'em poker game, a sequence of learning activities involving specific game situations that seek to develop in students the techniques of combinatorics and skills in calculating probabilities of equally likely events is presented.

Keywords: *The Teaching of Maths. Poker. Probability problems*

1 Introdução

A escola tem, entre suas metas fundamentais, o objetivo de formar os alunos para atuarem na sociedade e no mundo em que vivem. Dentro do ensino da matemática, as probabilidades merecem destaque, já que essa teoria é aplicada nos mais diversos ramos do conhecimento. Valores de seguros, planos de saúde, estudo dos riscos de investimentos, confiabilidade dos produtos, previsões meteorológicas, incidência de doenças infecciosas, construção de loterias e mercado financeiro são apenas alguns exemplos que utilizam a teoria de probabilidades. Todas essas situações baseiam-se em cenários de incertezas. Diante de um conjunto de informações incompletas, os cálculos de probabilidades apresentam parâmetros que auxiliam em projeções, na construção de previsões e na tomada de decisões.

Dessa forma, o desenvolvimento da teoria de probabilidade no ensino médio é uma ótima oportunidade para mostrar a aplicabilidade da matemática e a sua utilização para resolver problemas do dia a dia. Também é possível desenvolver o espírito crítico através da interpretação dos resultados e aprimorar a tomada de decisão.

O uso dos jogos com cartas para o estudo de probabilidade não é novidade e, de fato, os jogos de azar estão na gênese histórica deste ramo da matemática. A motivação inicial para o desenvolvimento dessa teoria continua presente nas atividades educacionais atuais. Os problemas de probabilidades envolvendo extração aleatória de cartas de um baralho constituem tema recorrente nas aulas de matemática e livros didáticos.

Muitos autores na área da educação desenvolveram pesquisas acerca do uso de jogos em atividades didáticas e em (Grando, 2000) pode-se encontrar um estudo detalhado sobre o papel pedagógico dos jogos no ensino de matemática.

Atualmente os educadores, e em especial os profissionais do ensino da matemática, tem um grande desafio: precisam estimular e atrair a atenção dos alunos para a construção dos conhecimentos. Nesse sentido, a inclusão de jogos representa um instrumento pedagógico importante para despertar o interesse dos alunos para o estudo da matemática. Segundo (Brasil, 1998):

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções.

Nesse trabalho são apresentados um conjunto de problemas de combinatória e probabilidades que abordam diversas situações do *jogo de pôquer*. O principal objetivo é de aprofundar e amadurecer os conhecimentos de

probabilidade dos alunos do ensino médio, procurando fornecer material de apoio aos colegas professores de matemática afim de que explorem de maneira alternativa os objetivos próprios desse conteúdo que, segundo as orientações educacionais complementares aos PCNs, são baseadas em:

- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem;
- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico;
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas, modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. Brasil (2002)

Nos livros (Lima et al., 2006) e (Morgado et al., 2006) podem ser encontrados problemas de contagem que abordam a extração de 5 cartas de um baralho para formação de mãos de pôquer. No entanto, até onde conhecemos, as situações apresentadas aqui, nas quais exploram-se diferentes momentos de partidas do Texas Hold'em, são novidades na matemática do ensino médio.

No pôquer, o jogador deve avaliar os riscos e, a partir de dados parciais, deve definir se o momento é adequado para apostar ou desistir. Dessa forma, esse jogo representa um modelo eficiente para reproduzir situações do cotidiano. Assim, essa proposta também tem o objetivo de desenvolver a habilidade de saber avaliar as opções e tomar decisões sem conhecer todas as variáveis.

Segundo (Torezzan, 2013), responsável pela disciplina *Fundamentos do Pôquer*, ministrada na Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP:

O jogo, na verdade, funciona como um laboratório para refinar habilidades que podem ser usadas na vida, como análise de risco, leitura de pessoas e construção de estratégias. Estudamos o pôquer para entender como as pessoas se comportam em cenários de estresse que exigem a tomada de decisões mesmo que as informações disponíveis para respaldá-las sejam incompletas.

Diante desse contexto, aparece o jogo de pôquer como alternativa pedagógica para o ensino de probabilidade. No artigo da Revista do Professor de Matemática (RPM), (Rodrigues, 1985) afirma que:

O jogo de pôquer é uma fonte bastante rica em exemplos e problemas interessantes, que podem ser utilizados para ilustrar as aulas de análise combinatória e probabilidade no ensino médio.

O sucesso de um jogador nesse esporte está associado a uma série de fatores, como inteligência, estratégia, raciocínio, conhecimentos de lógica e matemática, sorte e controle emocional. Ou seja, é um jogo de habilidades intelectuais e comportamentais. Por isso, o pôquer foi reconhecido como esporte da mente (Poker é esporte, 2010). Assim como o xadrez, é um esporte de alta complexidade, em pouco tempo aprende-se a jogar, porém para se tornar um bom jogador requer muito treino, estudo e dedicação (Alon, 2010).

O pôquer representa, no sentido pedagógico, um campo bastante farto e, neste trabalho, são apresentados 6 grupos de atividades, onde cada grupo contém um conjunto de problemas de combinatória e probabilidades que abordam diversas situações do jogo de pôquer da modalidade Texas Hold'em.

Na atividade 1 utiliza-se da combinatória para contar o número de possibilidades para as diferentes mãos do ranking de pôquer. As atividades 2, 3 e 4, representam situações-problema nas quais deseja-se determinar a probabilidade de completar mãos de pôquer a partir da abertura de algumas cartas. A atividade 5 é uma coleção de problemas de probabilidade na qual deseja-se determinar a chance de iniciar uma partida de Texas Hold'em com duas cartas específicas. Na atividade 6 determina-se a probabilidade de vitória de cada jogador envolvido na disputa de uma partida de pôquer no momento em que falta a abertura de uma carta.

No que segue, são apresentados alguns fatos históricos que podem servir como introdução e motivação para o estudo deste assunto. Ainda, são descritas as regras básicas e a dinâmica do Texas Hold'em, que é a modalidade de pôquer mais jogada.

2 Um pouco da história das probabilidades

As origens históricas do estudo das probabilidades estão vinculadas aos jogos de azar. No século XV, Pacioli (1445-1517) propôs o seguinte problema:

Dois jogadores disputavam um bolo de apostas que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?

Várias pessoas apresentaram solução, porém os raciocínios usados não convenciam à todos, pois haviam falhas na lógica. Matemáticos, como Tartaglia (1499-1557) e Cardano (1501-1576), equivocadamente acreditavam que tratava-se de um problema de proporção. Somente

no século XVII, Chevalier de Méré (1607-1684), um apaixonado por jogos, apresentou o problema proposto por Pacioli à Pascal (1623-1662). Após algumas trocas de cartas entre Pascal e Fermat (1601-1665), ambos chegaram à solução correta. Eles concluíram que $\frac{7}{8}$ do prêmio deveria ficar com o primeiro jogador e $\frac{1}{8}$ para o jogador com 3 pontos, pois contando com mais 3 partidas (pontos) em disputa, a única maneira do segundo jogador chegar aos 6 pontos primeiro, é vencendo todas, ou seja, considerando que a vitória de cada concorrente é equiprovável, a probabilidade favorável ao segundo jogador é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. A partir desse problema as bases matemáticas iniciais da teoria de probabilidades foram formuladas pelos matemáticos Pascal e Fermat. Porém o matemático que mais contribuiu para o desenvolvimento dessa teoria foi Laplace (1749-1827), que ampliou e sintetizou os estudos dessa área.

3 Pôquer - O jogo e as suas regras

Pôquer é um jogo de cartas, disputado com o tradicional baralho francês de 52 cartas. Esse baralho é composto por 4 naipes (copas, espadas, ouros e paus) conforme figura 1. Cada naipe tem cartas dos valores 2 (*dois*), 3 (*três*), 4 (*quatro*), 5 (*cinco*), 6 (*seis*), 7 (*sete*), 8 (*oito*), 9 (*nove*), 10 (*dez*), J (*valete*), Q (*dama*), K (*rei*) e A (*ás*).



Figura 1: Naipes.

Segundo (Mestre, 2013), o pôquer é o jogo de cartas mais popular do mundo. Pode ser jogado por dinheiro ou simplesmente por diversão. Pode ser jogado em uma mesa real ou virtual em um dos milhares de sites que disponibilizam pôquer online.

O jogador tem o objetivo de fazer a melhor combinação de 5 cartas, também chamada de mão. Normalmente o pôquer é disputado utilizando fichas com cores e valores diferentes. As fichas apostadas formam um conjunto, denominado de pote. O jogador que apresentar a melhor mão, ou que fizer com que todos os seus adversários desistam, ganha o pote.

Pelo fato do pôquer ser um jogo de apostas, muitas vezes as pessoas o associam a jogos de azar. Porém, esta não é a realidade, porque conforme o nível dos jogadores eleva, a sorte torna-se um fator cada vez menos influente para o resultado final do jogo. Em estudo recente, realizado pela empresa Cigital e coordenado pelo professor Dr Sean McCulloch do departamento de Matemática e Ciência da Computação de Ohio Wesleyan

University, analisou 103 milhões de mãos jogadas. Dessas, 75,7% não terminaram no show down (momento em que os jogadores mostram suas cartas), sendo assim definidas apenas por apostas dos jogadores, que não necessariamente tinham as melhores cartas (McCulloch e Hope, 2009).

O pôquer possui várias modalidades, como Texas Hold'em, Omaha, Stud, Draw Pôquer, Razz e outras. Cada modalidade apresenta variações em relação à forma de jogar, apostar e o número de cartas recebidas. Atualmente a modalidade mais conhecida e jogada em todo mundo é o Pôquer Texas Hold'em. Dessa forma, essa modalidade será utilizada como base para o restante desse trabalho.

3.1 Texas Hold'em

O Texas Hold'em é um jogo de pôquer com cartas comunitárias, jogado em mesas com 2 até 10 jogadores. Nessa modalidade cada jogador recebe apenas duas cartas fechadas (carta que somente o próprio jogador vê) e também há 5 cartas comunitárias, que são cartas abertas na mesa e utilizadas simultaneamente por todos jogadores. Para ganhar você precisa fazer a melhor combinação possível de 5 cartas, dentre as 7 cartas. Assim, nem sempre as duas cartas da mão do jogador serão utilizadas para formar um jogo.

3.2 Ranking das mãos de pôquer

A seguir apresentaremos o ranking das mãos possíveis no Texas Hold'em, em ordem decrescente de força (PokerStars, 2014). Todas as mãos estão acompanhadas de um exemplo ilustrativo.

Nesse trabalho, algumas nomenclaturas serão mantidas na língua estrangeira por se tratarem de expressões consagradas no pôquer e serem mais usuais do que traduções para a língua portuguesa.

1. **Royal Straight Flush:** também conhecida como sequência real, é uma sequência de dez a ases com cartas do mesmo naipe. Essa é a única mão imbatível no pôquer. Um exemplo é apresentado pela figura 2.



Figura 2: Exemplo para royal straight flush.

2. **Straight Flush:** também conhecida por sequência de cor, é qualquer sequência de 5 cartas do mesmo naipe, exceto do royal straight flush. Um exemplo é apresentado pela figura 3.

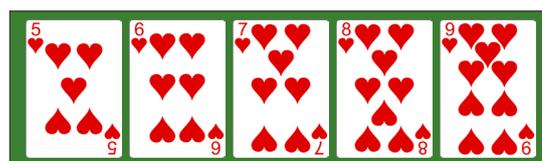


Figura 3: Exemplo para um straight flush.

3. **Quadra:** também conhecida como pôquer, são 4 cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 4.

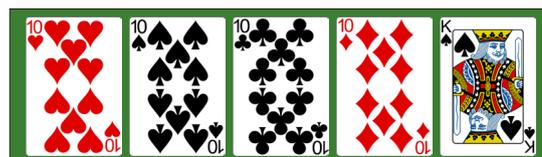


Figura 4: Exemplo de uma quadra de dez.

4. **Full House:** também conhecida por full hand, é uma mão composta por uma trinca mais um par. Um exemplo é apresentado pela figura 5.

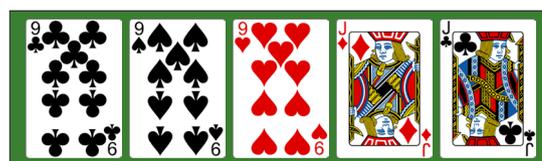


Figura 5: Exemplo de um full house.

5. **Flush:** quaisquer 5 cartas do mesmo naipe, conforme exemplo da figura 6.

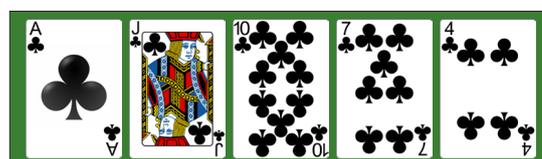


Figura 6: Exemplo de um flush de paus.

6. **Straight ou sequência:** 5 cartas em sequência, independente dos naipes, exceto straight flush. Um exemplo é apresentado pela figura 7.



Figura 7: Exemplo de uma sequência.

7. **Trinca:** 3 cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 8.



Figura 8: Exemplo de uma trinca de reis.

8. **Dois Pares:** duas duplas de cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 9.

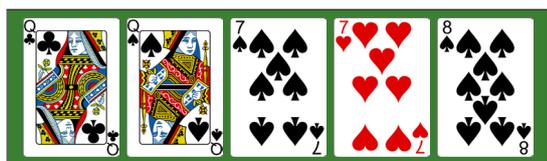


Figura 9: Exemplo para dois pares, damas e setes.

9. **Par:** duas cartas do mesmo valor. Um exemplo é apresentado pela figura 10.



Figura 10: Exemplo de mão para um par de reis.

10. **Carta alta:** qualquer mão que não se classifique nas categorias descritas acima. Um exemplo é apresentado pela figura 11.

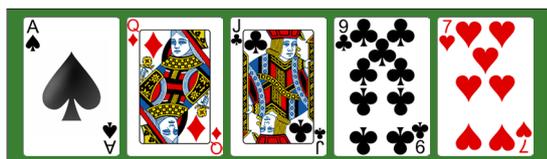


Figura 11: Sem nenhum par.

Em caso de empate, dois ou mais jogadores terem mãos iguais, por exemplo, um par, vencerá aquele com o par mais alto. Se ambos tiverem o mesmo par, vencerá aquele que tem a carta mais alta nas mãos, que é chamada de *kicker*. Se a carta mais alta estiver na mesa, então haverá empate na rodada, e portanto divide-se o pote de fichas.

3.3 Dealer e os blinds

A distribuição das cartas e a ordem das apostas é sempre realizada no sentido horário. Em cada rodada, um dos jogadores terá o botão do *dealer* em sua frente, indicando que a ação começará com o jogador a sua esquerda. Assim, o jogador que tem o botão a sua frente terá a vantagem de ser o último a agir, pois já conhecerá a ação dos demais adversários.

Os *blinds* são apostas obrigatórias, que devem ser feitas pelos jogadores nas duas posições imediatamente à esquerda do *dealer*, antes mesmo de receber suas cartas. O primeiro jogador à esquerda deve apostar o *small blind* (SB), que é metade do valor do segundo jogador à esquerda, que apostará o *big blind* (BB). O *big blind* representa a aposta mínima do jogo.

3.4 Ações do jogo

No Texas Hold'em, assim como em outras formas de pôquer, as ações disponíveis são desistir (*fold*), passar (*check*), apostar (*bet*), pagar (*call*) ou aumentar a aposta

(*raise*). As opções disponíveis dependerão da ação do jogador anterior. Cada jogador de pôquer sempre tem a opção de desistir, e assim descartar suas cartas e desistir do pote. Se ninguém tiver feito uma aposta ainda, então um jogador pode também passar (abdicar da aposta, mas manter suas cartas) ou apostar. Se um jogador tiver apostado, então os jogadores subsequentes podem desistir, pagar ou aumentar. Pagar é colocar o mesmo valor da aposta do jogador anterior. Aumentar é não apenas pagar a mesma aposta, mas também aumentar o seu valor.

3.5 Dinâmica do Texas Hold'em

Uma vez definido o *dealer* e os *blinds* terem sido colocados na mesa, são distribuídas duas cartas fechadas a cada um dos jogadores da mesa. A seguir, começando pelo jogador a esquerda do *big blind*, começa a primeira rodada de apostas.

Após todos os jogadores terem tomado suas decisões, são abertas as 3 primeiras cartas comunitárias na mesa, o que é chamado de **FLOP**. Então uma nova rodada de apostas se segue. Se antes do *flop* algum jogador fizer uma aposta e todos os demais desistirem, ele leva todas as fichas do pote e não haverá a abertura de cartas comunitárias. Da mesma forma, se após o *flop* alguém apostar e todos desistirem, a mão é decidida ali mesmo.

Se houver necessidade, uma quarta é aberta na mesa, chamada de **TURN**. Então segue mais uma rodada de apostas. Então é aberta a última carta comunitária, chamada de **RIVER** e a última rodada de aposta se segue, totalizando 4 turnos de apostas. Caso um jogador aposte e um ou mais oponentes paguem a aposta (*call*), no final do quarto turno de apostas é realizado o *show down*, momento que todos os jogadores mostram as cartas para ver quem tem o melhor jogo. O jogador com a melhor mão leva todas as fichas do pote e uma nova rodada se inicia, de forma que o atual *small blind* é o novo *dealer*. E assim, no sentido horário, o jogo prossegue.

4 Atividades Propostas

Na sequência desse trabalho apresentaremos uma coleção de problemas, divididas em 6 grupos, que são direcionadas para estudantes do terceiro ano do ensino médio, ano em que geralmente é desenvolvido as técnicas de contagem e o estudo da probabilidade.

Para aplicação dessas atividades, não é necessário que o professor e os alunos conheçam todas as regras ou saibam jogar o Texas Hold'em. Recomenda-se apenas a utilização de alguns conceitos básicos do jogo, como o ranking de mãos e a composição do baralho de cartas. Com estes conhecimentos mínimos, já é possível aplicar as atividades em sala de aula.

Muitas vezes os cálculos associados às técnicas de contagem resultam em números na casa dos milhões ou ainda maiores. Esses resultados são consequência de cansativos cálculos manuais das operações básicas da matemática. Assim, objetivando uma melhor dinâmica, recomenda-se a liberação do uso da calculadora para os alunos, pois, dessa forma eles têm a oportunidade de se familiarizar com esses equipamentos.

4.1 ATIVIDADE 1: Calculando o número de combinações possíveis para cada mão de pôquer

Nessa seção será apresentada uma justificativa matemática para o ranking das mãos do pôquer. Para isso vamos determinar o número de casos favoráveis a cada um dos 10 tipos de mãos, conforme ordem do ranking.

Notaremos que quanto maior é a força da mão de pôquer, menor é o número de combinações possíveis para formá-la com um baralho. Ou seja, as mãos mais fortes tem menor probabilidade de serem formadas.

4.1.1 Royal Straight Flush

Cinco cartas em sequência, do *dez à ás*, todas do mesmo naipe. Existem 4 sequências reais possíveis, uma para cada naipe.

4.1.2 Straight Flush

Cinco cartas em sequência do mesmo naipe, exceto os royals straight flush. Podem ser desde A-2-3-4-5 a 9-10-J-Q-K, ou seja, 9 sequências para cada naipe. Logo existem $4 \times 9 = 36$ straight flush.

4.1.3 Quadra

Quatro cartas com o mesmo valor. São 13 os valores possíveis numa quadra. A quinta carta da mão é qualquer uma entre as 48 cartas restantes. Portanto existem $13 \times 48 = 624$ quadras diferentes.

4.1.4 Full House

Essa mão é constituída por uma trinca e um par. A trinca é formada a partir de 3 de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,3} = 4$ trincas possíveis de um conjunto de 13 valores diferentes possíveis. Extraindo a trinca, restam 12 valores para o par. O par é formado a partir de uma dupla de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,2} = 6$ pares possíveis para cada um dos 12 valores restantes.

Portanto há $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3.744$ maneiras de formar um full house.

4.1.5 Flush

As cinco cartas pertencem todas ao mesmo naipe, não estando em sequência. Devemos ter 5 cartas entre as 13 possíveis do naipe, ou seja, $C_{13,5} = 1.287$ flush por naipe. Porém devemos excluir os casos que são straight flush ou royal.

Portanto existem $4 \times 1.287 - 36 - 4 = 5.108$ combinações de 5 cartas que representam um flush.

4.1.6 Sequência

Cinco cartas em sequência, não pertencendo todas ao mesmo naipe. As sequências podem ir de A-2-3-4-5 a 10-J-Q-K-A, o que faz um total de 10 sequências, em que cada carta pode ser qualquer um dos 4 naipes. É necessário retirar o número de sequência que forma um straight flush ou royal.

Portanto o número de sequências possíveis é $10 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 - 36 - 4 = 10.200$.

4.1.7 Trinca

Três cartas com o mesmo valor. Há 13 valores possíveis para a trinca e cada uma é formada por 3 de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor, ou seja, $C_{4,3} = 4$. Ainda é usada mais duas cartas entre as 48 restantes, mas é necessário retirar as mãos que formam full house.

Portanto existem $13 \times 4 \times (C_{48,2} - 12 \times C_{4,2}) = 52 \times (1.128 - 72) = 54.912$ trincas.

4.1.8 Dois Pares

Duas cartas do mesmo valor com mais outras duas do mesmo valor, mas diferentes das primeiras duas. Há 13 valores possíveis com os quais é necessário formar dois pares, ou seja, existem $C_{13,2} = 78$ duplas diferentes para dois pares. Cada par é formado por duas de um conjunto de 4 cartas do mesmo valor. Ainda há a quinta carta, que pode ser qualquer uma entre as $52 - 4 - 4 = 44$ restantes.

Portanto o número de combinações possíveis para dois pares é $78 \times C_{4,2} \times C_{4,2} \times 44 = 123.552$.

4.1.9 Um Par

Na mão há apenas um par e as outras cartas são diferentes do par e entre si. Cada par é uma combinação de duas das 4 cartas para cada um dos 13 valores possíveis, ou seja, há $13 \times C_{4,2} = 78$ pares diferentes. Ainda há as 3 cartas que restam, de valor diferente do par e entre si. Para terceira carta não coincidir com o par há 48 possibilidades. Para a quarta e a quinta cartas não coincidirem com as anteriores e entre si há, respectivamente, 44 e 40 possibilidades. Como a ordem da terceira, quarta e quinta cartas não diferem o jogo pela sua ordem temos que dividir pela permutação das 3 cartas.

Dessa forma a quantidade de combinações de 5 cartas que representam um par é $78 \times \frac{48 \times 44 \times 40}{3!} = \frac{78 \times 84.480}{6} = 1.098.240$.

4.1.10 Carta Alta

Quando não há nenhuma das mãos anterior, ou seja, não possui sequer um par. O número total de combinações de 5 cartas de um baralho de pôquer é dado por $C_{52,5} = 2.598.960$ mãos possíveis. Assim o número de mãos que representam carta alta é dado por $C_{52,5}$ descontando todas as mãos calculadas anteriormente.

Portanto a quantidade de mãos carta alta é $2.598.960 - (4 + 36 + 624 + 3.744 + 5.108 + 10.200 + 54.912 + 123.552 + 1.098.240) = 1.302.540$.

4.2 ATIVIDADE 2: Calculando a probabilidade do river ser favorável

Esse conjunto de problemas trata de situações nas quais conhecemos as duas cartas de um jogador, o flop e o turn, ou seja, conhecemos 4 cartas comunitárias. Diante dessa situação queremos determinar probabilidade do river (5ª carta comunitária) ser favorável a uma determinada mão. Vejamos algumas situações que aparecem com frequência no Texas Hold'em e que exigem os seguintes raciocínios:

4.2.1 Probabilidade de formar uma sequência

Considere que um jogador tenha dez de copas e valete de paus. No flop abriu cinco de paus e copas e a dama de paus, enquanto que o turn é nove de ouros conforme figura 12. Desejamos calcular a probabilidade desse jogador formar uma sequência.

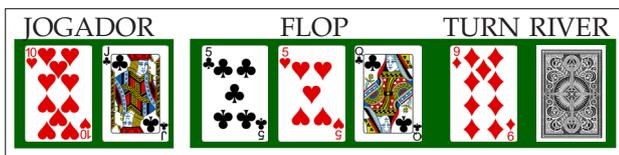


Figura 12: Probabilidade de formar uma sequência.

Note que no momento esse jogador possui apenas um par de cinco e possivelmente esteja perdendo para algum adversário, já que basta alguém ter um cinco, um nove ou uma dama para estar com uma mão melhor. Dessa forma, o jogador depende de um oito ou um rei para fechar uma sequência e assim possuir uma mão mais forte do que dois pares ou trinca (possíveis mãos adversárias).

Vejamos a probabilidade de formar uma sequência. Conhecemos 6 das 52 cartas do baralho. Dessa forma restam 46 possibilidades para o river. Como há 4 oitos e 4 reis, existem $4 + 4 = 8$ cartas favoráveis entre as 46 cartas restantes. Assim concluímos que a probabilidade

desse jogador formar uma sequência é $\frac{8}{46}$ ou $\frac{4}{23}$, que representa aproximadamente 17,39%.

Ciente dessa probabilidade, o jogador pode perceber que não é vantajoso pagar uma aposta alta do adversário, já que a probabilidade favorável é baixa. As orientações técnicas de pôquer exploram esse ponto de vista, fazendo avaliações do custo-benefício através da comparação entre duas razões: a primeira razão representa a probabilidade de completar determinada mão, enquanto que a segunda, é dada pela razão entre o número de fichas exigidas para pagar a aposta e o total de fichas do pote. Na situação analisada, as orientações técnicas aconselham à desistir da mão no caso em que a quantidade de fichas para pagar a aposta é superior a $\frac{4}{23}$ do total de fichas em disputa no pote. Por outro lado, orienta-se pagar uma aposta que exige menos que $\frac{4}{23}$ do total de fichas em disputa. Porém, nosso trabalho não tem o objetivo de seguir por esse caminho. Durante o restante das atividades, abordaremos somente a probabilidade de formar determinadas mãos, sem relacionar e comparar com a quantidade de fichas em disputa.

4.2.2 Probabilidade de formar um flush

Agora considere que um jogador tenha um seis e um oito de ouros. No flop temos seis de copas, ás de espadas e dez de ouros, além de um cinco de ouros conforme figura 13. Vamos calcular a probabilidade desse jogador formar um flush (5 cartas do mesmo naipe).

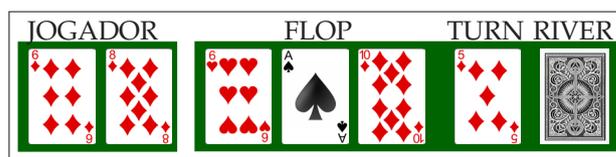


Figura 13: Probabilidade de formar um flush.

Nesse caso, o jogador tem um par de seis, porém é baixo, já que um dez ou ás de um adversário estaria vencendo nesse momento do jogo. As duas cartas de ouros mais as duas cartas comunitárias de ouros formam um flush draw (projeto de flush). Para completar esse projeto é preciso mais uma carta de ouros. Ao todo, há 13 cartas de ouros no baralho. Assim ainda existem 9 desse naipe dentre as 46 cartas restantes. Dessa forma a probabilidade de sair ouros no river é $\frac{9}{46}$, ou seja, aproximadamente 19,57%.

4.2.3 Probabilidade de formar um full house

Nessa situação considere que um jogador tenha dois pares, setes e dez, conforme figura 14. Queremos determinar a probabilidade de fazer um full house (trinca mais par). Veja as cartas desse caso:

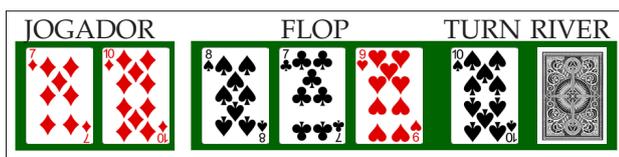


Figura 14: Probabilidade de formar um full house.

Nesse caso percebemos que dois pares não é uma mão suficientemente forte, já que se um adversário tem um *seis* ou um *valete*, ele possui uma sequência que está ganhando de dois pares. Porém, se esse dois pares se transformarem em um full house através do river, o jogador vence a sequência. Para formar o full house é necessário aparecer um *sete* ou um *dez* no river. Entre as 46 cartas restantes ainda restam dois *setes* e dois *dezes*. Assim a probabilidade de completar o full house é $\frac{4}{46}$, ou ainda, $\frac{2}{23}$ que corresponde a 8,70% aproximadamente.

4.2.4 Probabilidade de formar flush ou full house

Nessa situação considere que um jogador já esteja com a trinca formada antes do river ser aberto, conforme figura 15. Vamos determinar a probabilidade desse jogar formar um flush ou um full house.

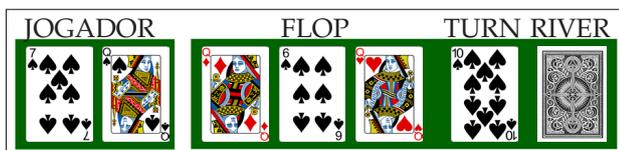


Figura 15: Probabilidade de formar flush ou full house

Para formar um flush é necessário mais uma carta do naipe de espadas. Ainda há 9 espadas entre as 46 cartas restantes. Já o full house depende de mais um par, par de *seis*, de *setes* ou *dez*. No baralho restam 3 *seis*, 3 *setes* e 3 *dezes*. Nenhum desses *seis*, *setes* ou *dezes* é do naipe de espadas, já que estas estão na mesa. Assim a probabilidade de formar um flush ou um full house é $\frac{18}{46}$, ou seja, $\frac{9}{23}$ que equivale a 39,13%.

4.3 ATIVIDADE 3: Calculando a probabilidade do turn juntamente com o river ser favorável

Esse conjunto de problemas trata de situações nas quais conhecemos as duas cartas de um jogador e o flop (3 primeiras cartas comunitárias). Diante dessa situação queremos determinar probabilidade do turn mais o river (4ª e 5ª cartas comunitárias) serem favoráveis a uma determinada mão. Vejamos alguns casos que merecem destaque:

4.3.1 Probabilidade de formar um flush

Nessa situação considere que um jogador tenha um *nove* e um *ás* de ouros. No flop aparece *dez* e *rei* de ouros junto

com *sete* de paus conforme figura 16. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar um flush.

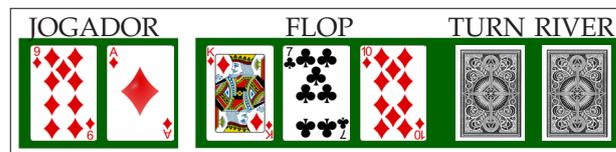


Figura 16: Probabilidade de formar um flush

Primeiramente é importante destacar que calcularemos a probabilidade de formar um flush contando com a abertura das duas últimas cartas coletivas (turn e river). Desse modo nessa coleção de problemas de probabilidade o espaço amostral é formado pelas combinações das 47 cartas restantes tomadas 2 a 2. Assim o número de elementos do espaço amostral é $C_{47,2} = \frac{47!}{2! \times 45!} = \frac{47 \times 46}{2} = 1.081$.

Para determinar os casos favoráveis, observe que das cartas restantes, há 9 cartas do naipe de ouros e 38 cartas dos demais naipes. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $9 \times 38 = 342$ possibilidades de sair exatamente uma carta de ouro entre as duas possíveis. Também existe a possibilidade de ambas serem de ouros. Desse modo há mais $C_{9,2} = 36$ possibilidades, portanto totalizando 378 casos favoráveis à formação de um flush, incluindo um royal straight flush.

Dessa forma, a probabilidade da formação de um flush é $P = \frac{9 \times 38 + C_{9,2}}{C_{47,2}} = \frac{378}{1.081} \approx 34,97\%$.

Nessa resolução não distinguimos a ordem que as duas cartas são abertas no turn e river, ou seja, *dois* de copas no turn juntamente com *três* de paus no river, contabilizamos como o mesmo jogo que *três* de paus no turn e *dois* de copas no river. Se distinguirmos a ordem das duas últimas cartas coletivas, o número de possibilidades para o turn é 47 e o número de possibilidades para o river é 46. Assim pelo princípio fundamental de contagem, o número de elementos do espaço amostral é $47 \times 46 = 2.162$. Para determinar os casos favoráveis com ouros no turn, ouros no river e ouros no turn e river é, respectivamente, $9 \times 38 = 342$, $38 \times 9 = 342$ e $9 \times 8 = 72$. Assim a probabilidade é $P = \frac{9 \times 38 + 38 \times 9 + 9 \times 8}{47 \times 46} = \frac{342 + 342 + 72}{2.162} = \frac{756}{2.162} \approx 34,97\%$.

4.3.2 Probabilidade de formar uma sequência

Nessa situação considere que um jogador tenha um *valete* de espadas e uma *dama* de copas. No flop aparece *cinco* de espadas, *nove* de paus e *dez* de ouros, conforme figura 17. Nesse jogo, se abrir um *valete* ou uma *dama* é favorável ao jogador. Porém calcularemos a probabilidade desse jogador formar uma sequência.

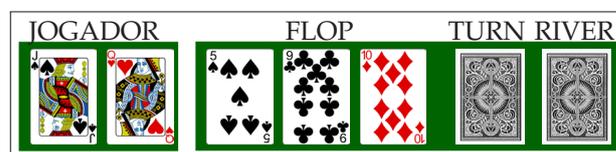


Figura 17: Probabilidade de formar uma sequência.

Para formar uma sequência é necessário que apareça um *oito* ou um *rei* no turn ou river. Novamente o total de combinações possíveis para o turn mais o river é $C_{47,2} = 1.081$. Dessas combinações é favorável o caso em que há pelo menos um *oito* ou pelo menos um *rei*. Nas 47 cartas restantes há 4 *oitos*, 4 *reis* e outras 39 cartas. Aplicando o princípio fundamental da contagem há $8 \times 39 = 312$ possibilidades de sair apenas uma das cartas favoráveis. Também podem abrir duas cartas favoráveis à sequência, ou seja, mais $C_{8,2} = 28$ casos favoráveis. Portanto, a probabilidade de completar uma sequência é $P = \frac{8 \times 39 + C_{8,2}}{C_{47,2}} = \frac{340}{1.081} \approx 31,45\%$.

4.3.3 Probabilidade de formar sequência ou flush

Considere que um jogador dependa de uma carta favorável para completar uma sequência ou flush de copas conforme figura 18. Qual é a probabilidade desse jogador formar uma sequência ou um flush?

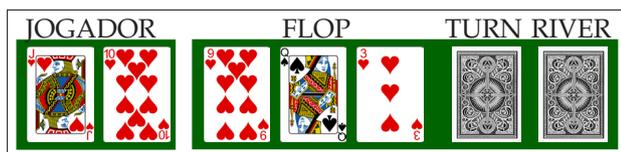


Figura 18: Probabilidade de formar sequência ou flush.

Para formar a sequência ou o flush o jogador depende de pelo menos um *oito* ou um *rei* ou ainda uma carta de copas entre as duas cartas a serem abertas. Assim totalizam 15 cartas favoráveis. Como o turn e o river ainda devem ser abertos, tem $C_{15,2} = 105$ possibilidades de que as duas cartas comunitárias restantes sejam favoráveis. Também serve o caso de abrir uma carta favorável com outra carta qualquer, isto é, mais $15 \times 32 = 480$ possibilidades de completar uma sequência ou flush.

Dessa forma, a probabilidade de acontecer uma das mãos mencionadas é $P = \frac{105 + 480}{C_{47,2}} = \frac{585}{1.081} \approx 54,12\%$.

Observe que, entre os 585 casos favoráveis, foram contabilizados 3 casos em que o flush está em sequência, ou seja, representam 3 straight flush (*sete ao valete de copas, oito à dama de copas e nove ao rei de copas*). Assim, a probabilidade desse jogador formar um straight flush é $P = \frac{3}{1.081} \approx 0,28\%$.

4.4 ATIVIDADE 4: Calculando a probabilidade das cartas comunitárias serem favoráveis

Nesse conjunto de situações partiremos de duas cartas específicas de um jogador e calcularemos a probabilidade de completar uma determinada mão. Agora consideremos que todas as cartas comunitárias estão fechadas. Vejamos alguns casos que se destacam:

4.4.1 Probabilidade de completar, pelo menos, a trinca de reis

Nessa situação considere que um jogador inicie com um par de *reis* conforme figura 19. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, a trinca de *reis*, ou seja, calcularemos a probabilidade de haver, pelo menos, um *rei* entre as cartas comunitárias.

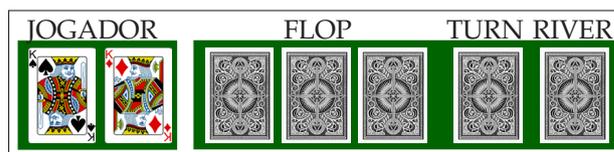


Figura 19: Probabilidade de completar, pelo menos, a trinca de reis.

Vamos considerar a abertura das 5 cartas comunitárias, porém lembramos que muitas partidas decidem-se antes, através de apostas em que um jogador consiga que todos os demais desistam de concorrer ao pote de fichas.

Nesse caso, desconsiderando a ordem que as cartas coletivas são abertas, o espaço amostral é formado pelas combinações de 50 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, o número de elementos do espaço amostral é $C_{50,5} = \frac{50!}{5! \times 45!} = 2.118.760$. Dessas possibilidades, o número de casos de formação de trinca são duas possibilidades para o terceiro *rei* juntamente com a combinação das 48 cartas restantes, diferentes de *rei*, tomadas 4 a 4, ou seja, $2 \times C_{48,4} = 389.160$. Também existe a possibilidade da abertura dos dois *reis* que sobraram (uma possibilidade), juntamente com a combinação das 48 cartas restantes tomadas 3 a 3, isto é, $1 \times C_{48,3} = 17.296$.

Portanto, a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, uma trinca de *reis* é $P = \frac{389.160 + 17.296}{2.118.760} = \frac{406.456}{2.118.760} \approx 19,18\%$.

É importante destacar que dentro dessa probabilidade calculada incluem-se outros casos, como por exemplo a trinca de *reis* vir acompanhada de outro par, ou seja, o jogador está com full house, que como sabemos é uma mão superior à trinca. Também há a possibilidade de quadra, straight flush e royal straight flush incluídas na probabilidade calculada.

Também observe que se um jogador iniciar com um outro par qualquer, a probabilidade de fechar, pelo menos, a trinca a partir desse par continua sendo 19,18%.

Uma resolução alternativa: a probabilidade da primeira carta do flop não ser *rei* é $\frac{48}{50}$. Já a probabilidade da segunda carta ser novamente diferente de *rei* é $\frac{47}{49}$, e assim sucessivamente calculamos a probabilidade até a quinta carta comunitária, considerando que entre as cartas abertas anteriormente não há *reis*. Desse modo, a probabilidade de não aparecer *rei* entre as 5 cartas coletivas é $P = \frac{48}{50} \times \frac{47}{49} \times \frac{46}{48} \times \frac{45}{47} \times \frac{44}{46} = \frac{45 \times 44}{50 \times 49} \approx 80,82\%$. Portanto, usando o complemento, a probabilidade de abrir pelo

menos um *rei* para formar a trinca é $100\% - 80,82\% = 19,18\%$.

4.4.2 Probabilidade de formar, pelo menos, um flush

Agora considere que um jogador inicie com um *cinco* e um *ás* de espadas conforme figura 20. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar, pelo menos, flush de espadas.

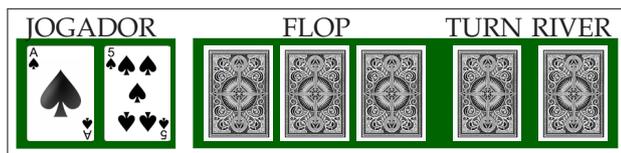


Figura 20: Probabilidade de formar, pelo menos, um flush.

Para completar o flush de espadas é necessário abrir pelo menos 3 cartas de espadas. O número de possibilidades de abrir 3 cartas de espadas juntamente com outras duas de naipes diferentes é $C_{11,3} \times C_{39,2} = 165 \times 741 = 122.265$. Já o número de casos favoráveis com 4 e 5 cartas comunitárias de espadas são, respectivamente, $C_{11,4} \times C_{39,1} = 330 \times 39 = 12.870$ e $C_{11,5} = 462$.

Assim a probabilidade desejada é $P = \frac{122.265 + 12.870 + 462}{C_{50,5}} = \frac{135.597}{2.118.760} \approx 6,4\%$.

4.4.3 Probabilidade de formar, pelo menos, uma sequência

Nesse caso considere que um jogador inicie com um *rei* de ouros e um *ás* de espadas conforme figura 21. Determinaremos a probabilidade desse jogador completar uma sequência de *dez à ás*, incluindo mãos superiores.

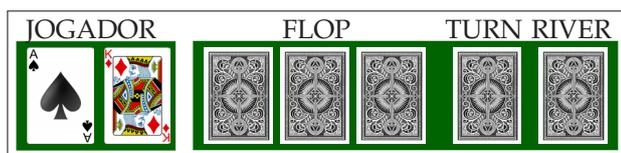


Figura 21: Probabilidade de formar, pelo menos, uma sequência.

Novamente a probabilidade que calcularemos inclui mãos superiores à sequência, desse modo, por exemplo, incluirá a possibilidade da haver 5 cartas do mesmo naipe, ou seja, um flush. Também incluirá o caso de royal straight flush. Observamos que full house ou quadra torna-se inviável, considerando que haverá uma sequência de *dez à ás*, e dessa forma essas mãos não estarão incluídas.

Para a formação da sequência em questão, necessitamos de um *dez*, um *valete*, uma *dama* e outras duas cartas quaisquer para formar as 5 cartas comunitárias. Há 4 possibilidades para a carta *dez*, 4 possibilidades para o *valete*, 4 para a *dama* e $C_{47,2} = 1.081$ para as duas cartas restantes. Assim, pelo princípio fundamental de

contagem, temos $4 \times 4 \times 4 \times 1.081 = 69.184$ combinações de 5 cartas coletivas favoráveis à formação da sequência de *dez à ás*.

Portanto, a probabilidade de formar a mão descrita nesse problema é $P = \frac{69.184}{C_{50,5}} = \frac{69.184}{2.118.760} \approx 3,27\%$.

4.5 ATIVIDADE 5: Calculando a probabilidade de receber determinadas cartas

Nesse conjunto de problemas, vamos calcular a probabilidade de um jogador receber determinadas mãos iniciais (duas cartas específicas). Vejamos as mãos preferidas dos jogadores:

4.5.1 Par de ases

A melhor mão possível para iniciar uma partida de pôquer é um par de *ases* conforme exemplo apresentado pela figura 22. Qual é a probabilidade de um jogador receber essa mão?



Figura 22: Par de ases.

O espaço amostral para esse problema são todas as combinações de 52 cartas tomadas 2 a 2. Já o número de pares diferentes de *ases* é dado pela combinação dos 4 *ases* tomados 2 a 2. Assim a probabilidade de um jogador iniciar com um par de *ases* é $P = \frac{C_{4,2}}{C_{52,2}} = \frac{6}{1.326} = \frac{1}{221} \approx 0,45\%$. Ou seja, existe a expectativa de iniciar com par de *ases* em uma de 221 mãos jogadas. Essa mesma probabilidade é válida para outro par qualquer específico.

Outra resolução possível: a probabilidade da primeira carta ser um *ás* é $\frac{4}{52}$. Já a probabilidade da segunda carta ser outro *ás* é $\frac{3}{51}$. Assim a probabilidade de ambas serem *ases* é $P = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$.

4.5.2 Ás e rei

Qual é a probabilidade da mão inicial ser um *ás* acompanhado de um *rei* conforme exemplo apresentado pela figura 23?

Como há 4 *ases* e 4 *reis*, o número de duplas (*ás* mais *rei*) possíveis é $4 \times 4 = 16$. Assim a probabilidade de receber uma dessas duplas é $P = \frac{4 \times 4}{C_{52,2}} = \frac{16}{1.326} \approx 1,21\%$.

Uma solução alternativa: a probabilidade da primeira carta ser favorável é $\frac{8}{52}$. Consequentemente, a probabilidade da segunda carta também ser favorável é



Figura 23: Exemplo de um ás com rei.

$\frac{4}{51}$, já que se a primeira foi ás, restam 4 reis favoráveis ou se a primeira foi rei, restam 4 ases favoráveis. Assim a probabilidade de iniciarmos com a dupla mencionada é $P = \frac{8}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{32}{2.652} \approx 1,21\%$.

4.5.3 Duas cartas do mesmo naipe

Qual é a probabilidade da mão inicial ser duas cartas do mesmo naipe conforme a ilustração apresentada pela figura 24?



Figura 24: Exemplo para duas cartas do mesmo naipe.

Considerando que o espaço amostral são todas combinações de 52 cartas tomadas 2 a 2. Os casos favoráveis são dados por todas combinações das 13 cartas de ouros tomadas 2 a 2, multiplicado por 4 naipes possíveis. Assim a probabilidade é $P = \frac{4 \times C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{4 \times 78}{1.326} = \frac{4}{17} \approx 23,53\%$.

Também é possível considerar o seguinte raciocínio. Considere que a primeira carta já é conhecida, ou seja, sabemos o naipe. Assim para a probabilidade da segunda carta ser do mesmo naipe é $P = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$.

4.6 ATIVIDADE 6: Calculando a probabilidade de cada jogador

Nesse conjunto de problemas analisaremos a mão de mais de um jogador. A partir de algumas situações do jogo, calcularemos a probabilidade de vitória para cada jogador envolvido na partida.

Analisaremos somente as situações em que falta apenas o river ser descoberto, pois as demais situações aumentariam excessivamente as combinações possíveis e assim fugiria do objetivo desse trabalho.

Nesses problemas chamaremos os jogadores de Alfa, Beta, Gama e Delta.

4.6.1 Uma disputa entre dois jogadores

Considere uma partida disputada pelos jogadores Alfa e Beta, faltando a abertura do river, conforme figura 25. Qual é a probabilidade de vitória para cada jogador?

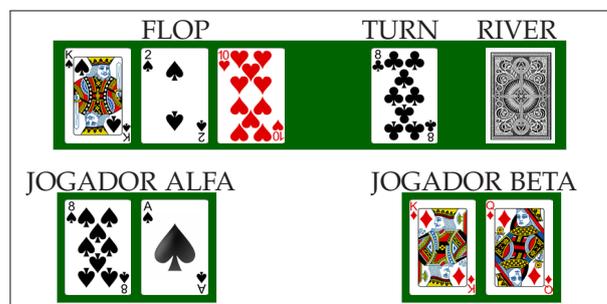


Figura 25: Qual é a probabilidade de vitória de Alfa e de Beta?

No momento da abertura do turn, cada jogador tem um par, porém Beta está vencendo pelos critérios de desempate porque tem o maior par. As possibilidades de vitória de Alfa baseiam-se em completar um segundo par (par de ases), uma trinca de oitos ou completar o flush de espadas. Assim Alfa precisa de um ás ou um oito ou uma carta do naipe de espadas no river para vencer. Quaisquer cartas diferentes dessas, são favoráveis à Beta.

Como ainda há três ases, dois oitos e 9 cartas do naipe de espadas entre as 44 restantes, a probabilidade de vitória de Alfa é $P = \frac{14}{44} = \frac{7}{22} \approx 31,82\%$. Consequentemente, a probabilidade de Beta vencer é $P = \frac{30}{44} = \frac{15}{22} \approx 68,18\%$.

4.6.2 Uma disputa entre três jogadores

Vamos calcular a probabilidade de vitória para Alfa, Beta e Gama na seguinte partida de pôquer ilustrada na figura 26.

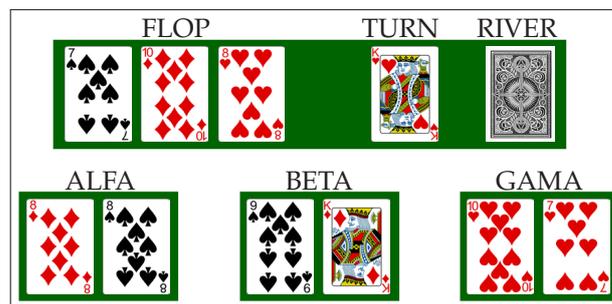


Figura 26: Qual é a probabilidade de vitória de Alfa, de Beta e de Gama?

Nesse momento Alfa está vencendo com uma trinca. Beta tem apenas um par, mas tem um projeto de sequência. Já Gama, tem dois pares e tem a possibilidade de completar um flush ou um full house.

Beta necessita um seis ou valete para completar a sequência, porém não pode ser do naipe de copas, pois dessa forma Gama completaria seu flush, que vence a sequência. Com um rei, Beta completaria trinca, mas

também não serve, porque assim Alfa completaria full house. Portanto, Beta tem 3 *seis* e 3 *valetes* que são favoráveis entre as 42 cartas restantes. Portanto a probabilidade de Beta vencer é $P = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 14,29\%$.

Gama pode vencer com flush de copas ou full house formado por uma trinca de *dez* mais um par de *setes*. Se abrir um *sete* ou *dez* no river, Alfa e Gama completariam full house. Um *sete* favorece Alfa porque, pelos critérios de desempate do full house, a trinca de Alfa é maior do que a trinca de *setes* de Gama. Já um *dez* favorece Gama, pois forma um full house com trinca de *dez* e par de *setes*. Portanto Gama tem 9 cartas de copas e dois *dez* que o favorecem a vencer. Dessa forma a probabilidade de Gama vencer é $P = \frac{11}{42} \approx 26,19\%$.

O restante das cartas são favoráveis à Alfa, ou seja, 25 das 42 cartas restantes. Dessa forma a probabilidade de Alfa vencer é $P = \frac{25}{42} \approx 59,52\%$.

4.6.3 Outra disputa entre três jogadores

Vamos calcular a probabilidade de vitória para Alfa, Beta e Gama na seguinte partida de pôquer ilustrada na figura 27.

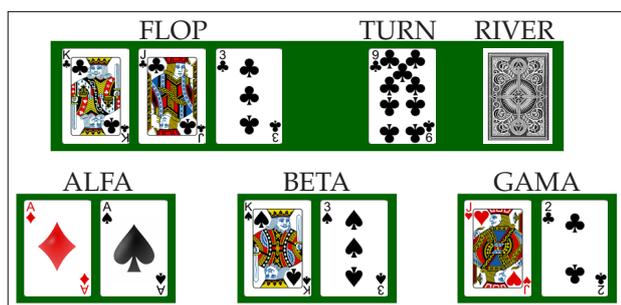


Figura 27: E agora, qual é a probabilidade de vitória de Alfa, de Beta e de Gama?

Nessa jogada Gama está vencendo com flush do naipe de paus. Enquanto que Beta tem dois pares, mas tem a possibilidade de completar flush, se abrir mais uma carta de paus, ou full house, se abrir mais um *três* ou um *rei*. Alfa tem a possibilidade de completar o flush de paus.

Se tiver uma carta do naipe de paus no river, os três jogadores fazem flush e acabam empatando até nos critérios de desempate porque o *dois* de paus do jogador Gama não é usado, já que Gama utiliza as 5 maiores cartas de paus, que seriam exatamente as cartas comunitárias. Nesse caso, o pote de fichas é dividido igualmente entre os três concorrentes na partida. Como ainda há 8 cartas de paus, a probabilidade da partida terminar triplamente empatada é $P = \frac{8}{42} = \frac{4}{21} \approx 19,05\%$.

Além do empate ser favorável, o resultado ideal à Beta é completar full house. Para isso, Beta aguarda uma das duas cartas *três* ou um dos dois *reis* restantes. Dessa forma, a probabilidade desse evento ocorrer é $P = \frac{4}{42} = \frac{2}{21} \approx 9,52\%$.

Alfa não tem nenhuma chance de ganhar o pote de fichas sozinho, somente o empate lhe é favorável.

Demais resultados são favoráveis à Gama. Como há 8 cartas que geram empate e 4 cartas úteis à Beta, sobram 30 cartas que interessam para Gama vencer sem precisar dividir o pote de fichas. Dessa forma, a probabilidade de Gama vencer sozinho a partida é $P = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \approx 71,43\%$.

4.6.4 Uma disputa entre quatro jogadores

Nessa situação, consideraremos quatro jogadores (Alfa, Beta, Gama e Delta) na disputa. Baseado na figura 28, calcularemos a probabilidade de vitória de cada jogador.

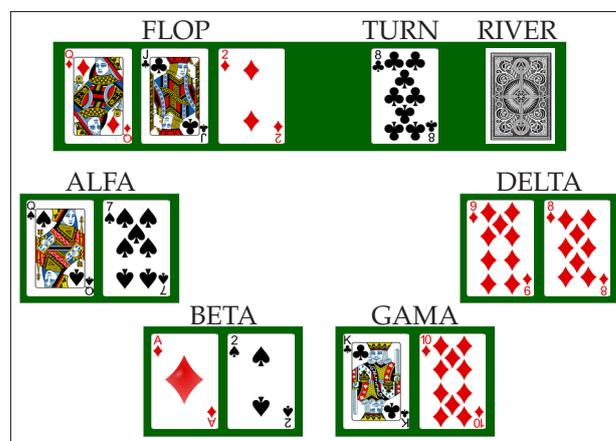


Figura 28: Qual é a probabilidade de vitória de cada jogador?

Alfa, Beta e Delta tem um par cada. Pelos critérios de desempate, Alfa está vencendo no momento.

Beta depende exclusivamente de um *dois* para formar trinca e vencer a mão. A carta *ás* não serve porque Gama completaria uma sequência. Como há duas cartas favoráveis entre as 40 restantes, a probabilidade de Beta ganhar é $P = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 5\%$.

Gama formará uma sequência se o river for *nove* ou *ás*. Ainda há 3 cartas de cada valor no baralho. Um *rei*, diferente do naipe de ouros, também serve, pois dessa forma venceria com o maior par. Existem dois *reis* no baralho que são favoráveis. Portanto a probabilidade de vitória de Gama é $P = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 20\%$.

Delta está na expectativa de três mãos. Completar uma trinca de *oitos*, formar uma sequência de *oito* à *dama* ou fazer um flush de ouros. Entre as 40 cartas restantes, há dois *oitos*, três *dez* para a sequência e 7 cartas do naipe de ouros para o flush. Assim, a probabilidade de Delta levar o pote de fichas é $\frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$.

Demais cartas são favoráveis à Alfa. Portanto a probabilidade de Alfa vencer é $P = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 45\%$.

5 Considerações finais

A teoria de probabilidades é aplicada em diversas áreas, porém percebemos que a maioria das atividades presen-

tes nos livros didáticos de matemática exploram situações como lançamento de dados ou moedas ou ainda a extração de cartas do baralho. Também é frequente, nas atividades propostas, a presença de problemas que falam da retirada de bolas de determinadas cores de uma urna, além de situações envolvendo sorteio de números, pessoas ou objetos. Acreditamos que esses problemas têm espaço nas aulas de probabilidade, porém não são situações concretas do dia a dia.

Pensando em aperfeiçoar as atividades de ensino-aprendizagem de probabilidades, buscamos construir uma proposta de intervenção pedagógica com o objetivo de conquistar a participação dos alunos, o interesse pelos cálculos de probabilidade e o gosto para estudar matemática. Nesse trabalho abordamos uma série de situações em diversos momentos do jogo de pôquer. Todos esses casos podem ser utilizados como situações-problema nas aulas de matemática, em particular, para o ensino de combinatória e probabilidade.

O pôquer é um tema que desperta a curiosidade e o interesse das pessoas, já que o número de praticantes cresce a cada dia. No entanto, a ideia desse trabalho não é fomentar a criação de clubes de pôquer nas escolas, nem tem a intenção de montar mesas de carteador dentro da sala de aula. Um dos objetivos foi iniciar um debate da presença e a importância da matemática nesse esporte que tem notável propagação mundial.

Durante esse trabalho associamos o jogo à resolução de problemas. Pensamos que a resolução de problemas é uma metodologia indispensável para o ensino da matemática de qualidade. No momento que desenvolvemos o ensino baseado na resolução de problemas, com aplicações dos conteúdos estudados, estamos valorizando a importância da matemática no contexto sócio-cultural, estamos motivando os alunos para o estudo e, simultaneamente, estamos preparando os educandos para a cidadania.

Desse modo, as atividades pedagógicas propostas nesse trabalho são baseadas em metodologias que estão amparadas por diversas diretrizes do ensino da matemática. Também pensamos que a nossa busca por alternativas didáticas que substituem metodologia tradicionais e desestimulantes por um estudo mais atraente, que desafia os educandos através da resolução de problemas, são indícios de que estamos conduzindo a matemática na direção de um ensino mais significativo e eficiente.

Referências

- Alon, N., 2010. Poker, chance and skill.
URL <http://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/skill14.pdf>
- Brasil, 1998. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries). Secretaria de Educação Fundamental - MEC, Brasília.
- Brasil, 2002. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental - MEC, Brasília.
- Grando, R. C., 2000. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., 2006. A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, 6th Edition. Vol. 2. SBM, Rio de Janeiro.
- McCulloch, S., Hope, P., 2009. Statistical analysis of texas hold'em.
URL <http://www.pokereesporte.com/cig.pdf>
- Mestre, N., 2013. A onda do pôquer no brasil.
URL http://www.istoe.com.br/reportagens/315043_A+ONDA+DO+POQUER+NO+BRASIL
- Morgado, A. C., de Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., Fernandez, P., 2006. Análise Combinatória e Probabilidade, 9th Edition. SBM, Rio de Janeiro.
- Poker é esporte, 2010. Poquêr reconhecido como esporte da mente.
URL <http://www.pokereesporte.com/>
- PokerStars, 2014. Valores das mãos de pôquer.
URL <http://www.pokerstars.com/br/poker/games/rules/hand-rankings/>
- Rodrigues, F. W., 1985. O jogo do pôquer e o cálculo de probabilidades. Revista do Professor de Matemática nº 66 (6).
- Torezzan, C., 2013. Fundamentos do pôquer.
URL [http://www.istoe.com.br/reportagens/321828_POQUER\\$+\\$NA\\$+\\$SALA\\$+\\$DE\\$+\\$AULA](http://www.istoe.com.br/reportagens/321828_POQUER$+$NA$+$SALA$+$DE$+$AULA)
- Brasil, 1998. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª