# Estabilidade

Conhecimentos Básicos

# Conhecimentos Básicos

- **Unidades**

| *NOME* | *SÍMBOLO* | *FATOR MULTIPLICADOR (UND)* |
|---|---|---|
| *Exa* | E | *$10^{18}$ = 1 000 000 000 000 000 000* |
| *Peta* | *P* | *$10^{15}$ = 1 000 000 000 000 000* |
| *Terá* | *T* | *$10^{12}$ = 1 000 000 000 000* |
| *Giga* | *G* | *$10^{9}$ = 1 000 000 000* |
| *mega* | *M* | *$10^{6}$ = 1 000 000* |
| *quilo* | *K* | *$10^{3}$ = 1 000* |
| *hecto* | *H* | *$10^{2}$ = 100* |
| *deca* | *Da* | *10* |
| *Deci* | *D* | $10^{-1}$ = 0, 1 |
| *centi* | *C* | $10^{-2}$ = 0, 01 |
| *Mili* | *M* | $10^{-3}$ = 0, 001 |
| *micro* | $\mu$ | $10^{-6}$ = 0, 000 001 |
| *nano* | N | $10^{-9}$ = 0, 000 000 001 |
| *Pico* | *P* | $10^{-12}$ = 0, 000 000 000 001 |
| *femto* | *F* | $10^{-15}$ = 0, 000 000 000 000 001 |
| *Atto* | *A* | $10^{-18}$ = 0, 000 000 000 000 000 001 |

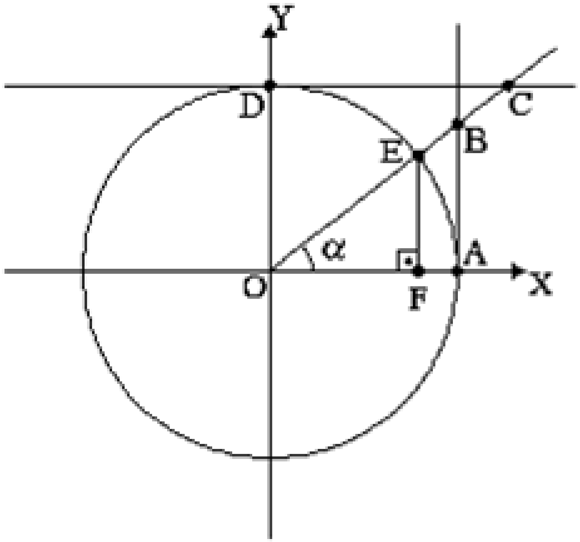
# Conhecimentos Básicos

- **Conversão de Unidades**

| *UNIDADE* | *EQUIVALENCIA* |
|---|---|
| *1 MPa* | *1 $N/mm^2$* |
| *1 MPa* | *1 x $10^6$ $N/m^2$* |
| *1 GPa* | *1 x $10^9$ $N/m^2$* |
| *1 m* | *100 cm* |
| *1 cm* | *0,01 m* |
| *1 kgf* | *9,81 N* |
| *1 kgf* | *2,20 lb* |
| *1 polegada (ou 1")* | *2,54 cm* |
| *1 $m^2$* | *10000 $cm^2$* |

# Conhecimentos Básicos

- **Trigonometria**




$$sen\alpha = \overline{EF}$$

$$\cos\alpha = \overline{OF}$$

$$tg\alpha = \overline{AB}$$

$$\cot g\alpha = \overline{DC}$$

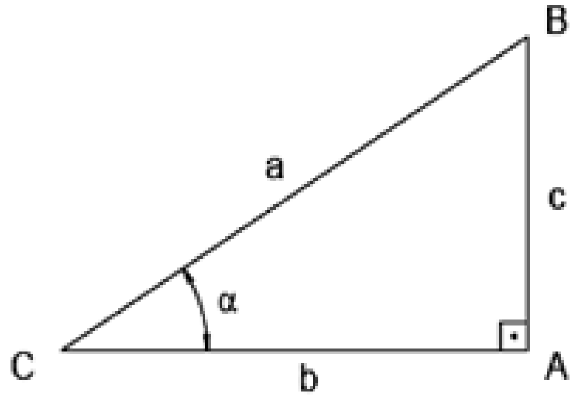
$$\sec\alpha = \overline{OB}$$

$$\cos\sec\alpha = \overline{OC}$$

$$\overline{OE} = R = 1$$

# Conhecimentos Básicos

- **Triângulo retângulo**



triângulo retângulo

$$sen\alpha = \frac{cateto \text{ oposto}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \text{ adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto \text{ oposto}}{cateto \text{ adjacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{cateto \text{ adjacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = arctg\frac{c}{b};\ \alpha = arcsen\frac{c}{a};\ \alpha = \text{arccos}\frac{b}{a};$$

**Relação fundamental da trigonometria: **$sen^2\, x + cos^2\, x = 1$**

# Conhecimentos Básicos

a. **Razões Trigonométricas Especiais**

| | 30º | 45º | 60º |
|---|---|---|---|
| SENO | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| COSSENO | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| TANGENTE | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

b. **Triângulo qualquer**

***Lei dos Senos:*** $$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2\mathrm{R}$$

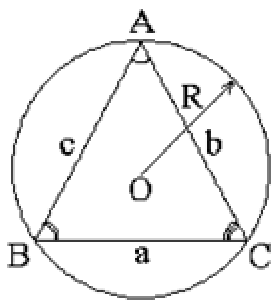


***Figura 1.3 – Triângulo qualquer***

***Lei dos Cossenos:***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

# Conhecimentos Básicos

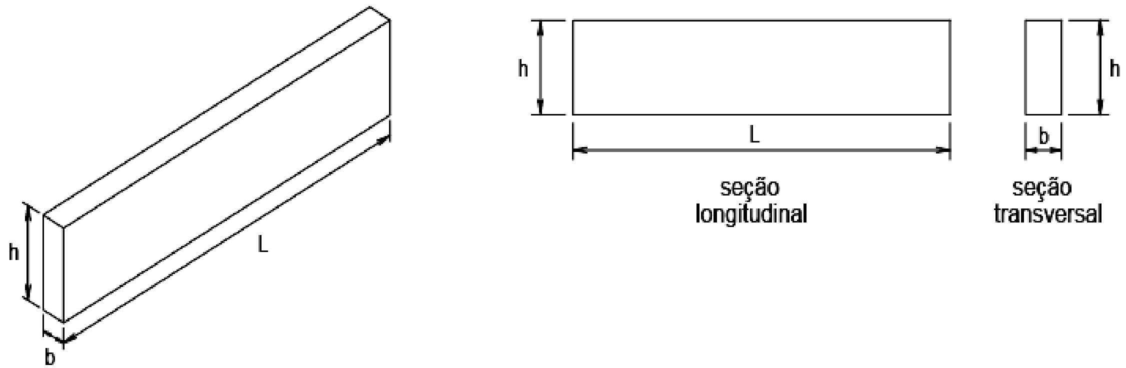
- **Alfabeto Grego**

| Nome | Símbolo | | Nome | Símbolo | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Maiúscula | Minúscula | | Maiúscula | Minúscula |
| **Alfa** | Α | α | **Ni** | Ν | ν |
| **Beta** | Β | β | **Csi** | Ξ | ξ |
| **Gama** | Γ | γ | **Ômicron** | Ο | ο |
| **Delta** | Δ | δ | **PI** | Π | π |
| **Épsilon** | Ε | ε | **Rô** | Ρ | ρ |
| **Zeta** | Ζ | ζ | **Sigma** | Σ | σ |
| **Eta** | Η | η | **Thau** | Τ | τ |
| **Teta** | Θ | θ | **Upsilon** | Υ | υ |
| **Iota** | Ι | ι | **Phi** | Φ | φ |
| **Capa** | Κ | κ | **Chi** | Χ | χ |
| **Lambda** | Λ | λ | **Psi** | Ψ | ψ |
| **Mi** | Μ | μ | **Ômega** | Ω | ω |

# Conhecimentos Básicos

- **Propriedades Geométricas das Figuras Planas**

- O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de barras, como de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo.



# Conhecimentos Básicos

- **As principais propriedades geométricas de figuras planas são:**
- Área (A)
- Momento de Inércia (I)
- Momento estático (M)
- Módulo de resistência (W)
- Centro de gravidade (CG)
- Raio de giração (i)

# Conhecimentos Básicos

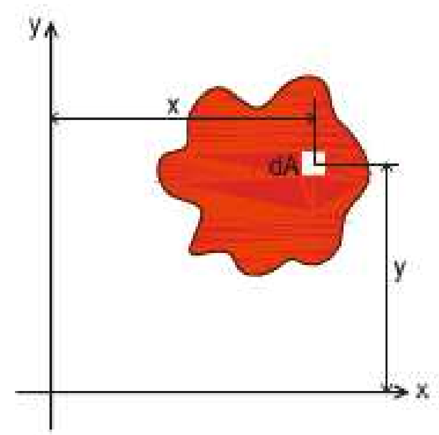
- **Área (A)**

- A área de uma figura plana é a superfície limitada pelo seu contorno. Para contornos complexos, a área pode ser obtida aproximando-se a forma real pela justaposição de formas geométricas de área conhecida (retângulos, triângulos, etc).
- A unidade de área é $[L]^2$ (unidade de comprimento ao quadrado).
- A área é utilizada para a determinação das tensões normais (tração e compressão) e das tensões de transversais ou de corte (cisalhamento).

# Conhecimentos Básicos

- **Momento Estático (M)**
  - Momento estático de um **elemento** de uma superfície plana em relação a um eixo é o produto da área do elemento pela sua distância ao eixo considerado.
  - Logo:

- O momento estático do elemento em relação ao eixo x será:
  - **M'x = y dA**
- O momento estático do elemento em relação ao eixo y será:
  - **M'y = x dA**



# Conhecimentos Básicos

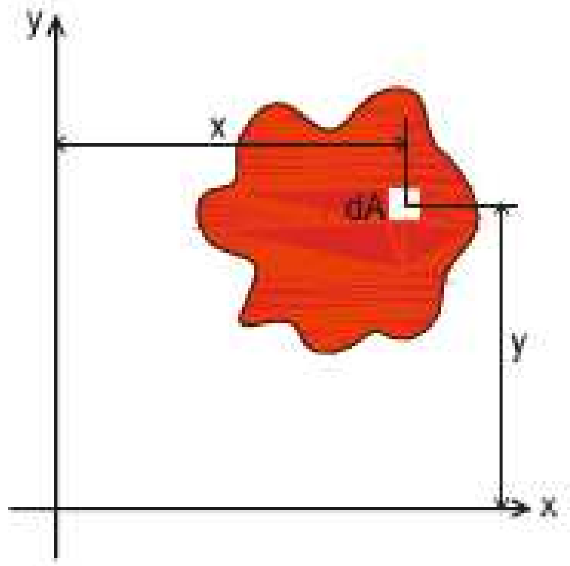



**Figura 1** – Momento Estático (M)

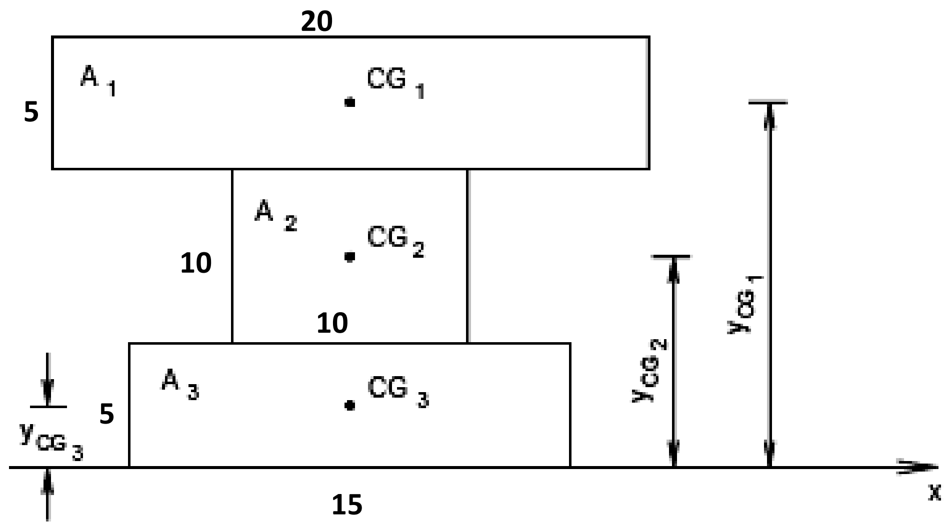
# Conhecimentos Básicos

- **Momento estático** de uma **superfície plana** em relação a um eixo é a soma dos momentos estáticos, em relação ao mesmo eixo, dos elementos que formam a superfície total. Logo:
  - O momento estático da superfície em relação ao eixo x será:
    - $$M_x = \int_A M_x' = \int_A y \cdot dA$$
  - O momento estático da superfície em relação ao eixo y será:
    - $$M_y = \int_A M_y' = \int_A x \cdot dA$$
  - Momento estático é uma grandeza escalar com dimensão M = $[L]^3$, podendo ser positivo, negativo ou nulo. É utilizado para a determinação das tensões transversais que ocorrem em uma peça **submetida à flexão**.

# Conhecimentos Básicos

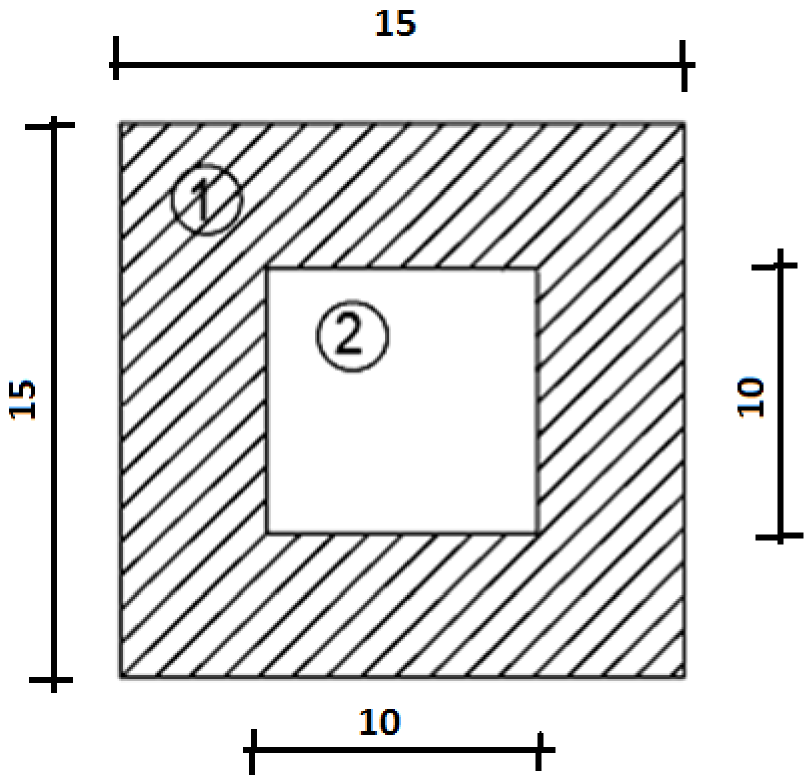
- O **Momento Estático de uma superfície composta** por várias figuras conhecidas é o somatório dos Momentos Estáticos de cada figura.

- Determinar o Momento Estático das figuras abaixo:



# Conhecimentos Básicos

- **Elemento Vazado**



# Conhecimentos Básicos

- **Centro de Gravidade ou Baricentro (CG)**

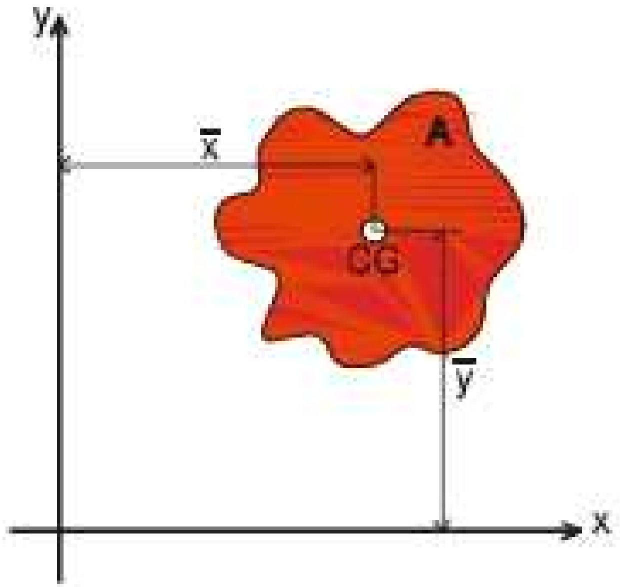



**Figura 2** – Centro de Gravidade ou Baricentro (CG)

# Conhecimentos Básicos

- Portanto, atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma única força *P*. Esta força, chamada peso do corpo, é aplicada no seu baricentro, ou cento de gravidade (CG). O centro de gravidade pode localizar-se dentro ou fora da superfície.

- Sendo CG o centro de gravidade de uma superfície plana de área A definido pelo par ordenado (x,y) tem-se as seguintes expressões:

  - $\mathbf{Mx = y_{cg} \cdot A}$ **e** $\mathbf{My = x_{cg} \cdot A}$

# Conhecimentos Básicos

- que exprimem o chamado teorema dos momentos estáticos e possibilitam determinar o centro de gravidade da superfície plana, ou seja:
  - **$y_{cg}$ = My/A e $x_{cg}$ = Mx . A**
    - **Ou**

$$\bar{y}_{cg} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_A y \cdot dA}{A}$$

$$\bar{x}_{CG} = \frac{\int_A M_x}{A} = \frac{\int_A x \cdot dA}{A}$$

# Conhecimentos Básicos

- onde:
  - $\boldsymbol{x_{cg}}$ = distância do *CG* da figura até o eixo *y* escolhido arbitrariamente;
  - $\boldsymbol{y_{cg}}$ = distância do *CG* da figura até o eixo *x* escolhido arbitrariamente;
  - $\boldsymbol{M_x}$ = momento estático da figura em relação ao eixo *x*;
  - $\boldsymbol{M_y}$ = momento estático da figura em relação ao eixo y;
  - $\boldsymbol{A}$ = área da Figura.

# Conhecimentos Básicos

- **Propriedades do centro de gravidade**
  - O momento estático de uma superfície em relação a qualquer eixo baricêntrico (que passe pelo CG) é nulo.
  - Se existe um eixo de simetria na peça, então o CG está contido neste eixo.

# Conhecimentos Básicos

- **Centro de gravidade de área composta**
  - Qualquer polígono pode ser decomposto em retângulos ou triângulos, cujos CGs podem ser facilmente determinados.

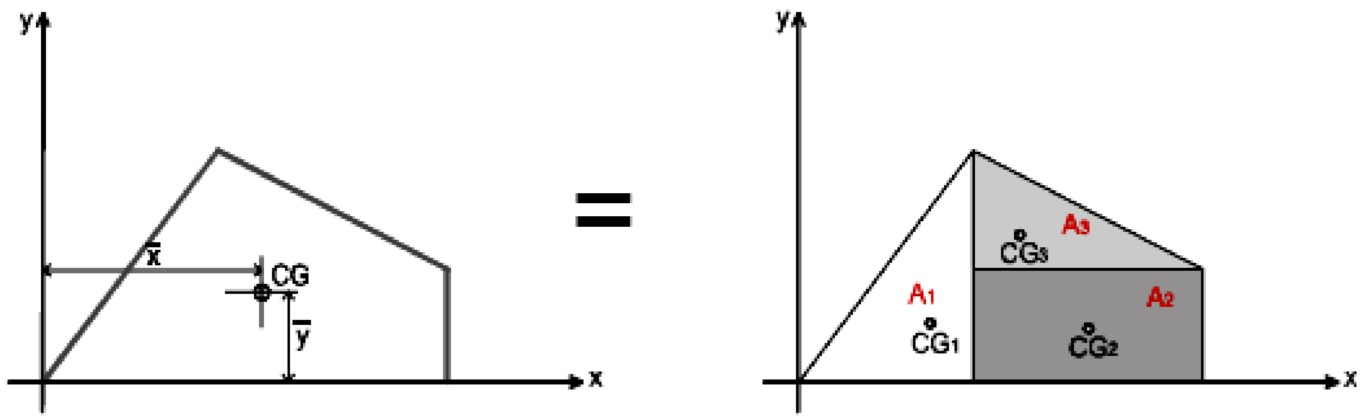



**Figura 2** – Centro de Gravidade de área composta (CG)

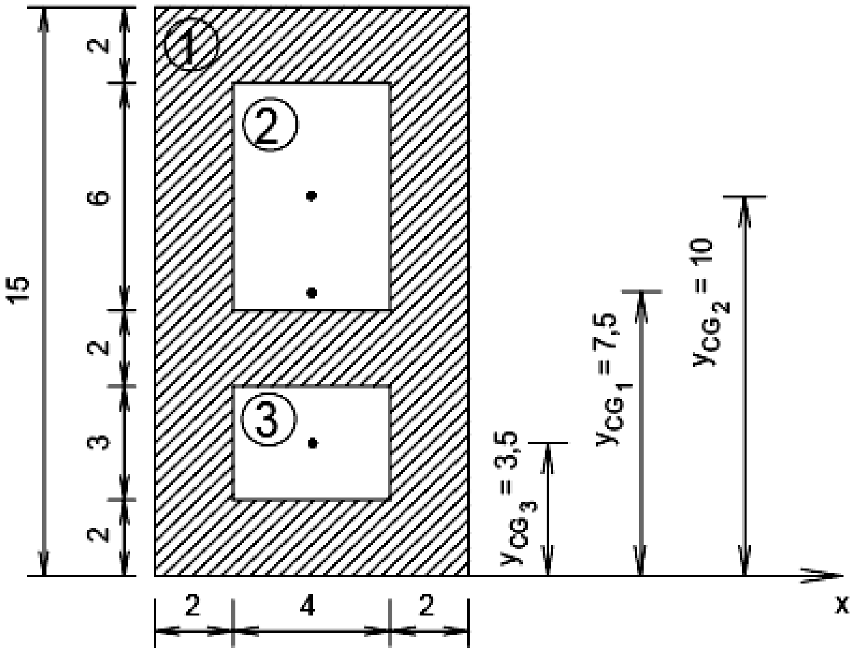
# Conhecimentos Básicos

- O centro de gravidade de uma superfície composta por várias figuras, é expresso por:

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

# Conhecimentos Básicos

- **Exemplos:**
  - 1 - Determinar o centro de gravidade da figura abaixo:



# Conhecimentos Básicos

- Solução

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$
$$A = (8 \times 15) - (6 \times 4) - (4 \times 3)$$
$$A = 84\, cm^2$$

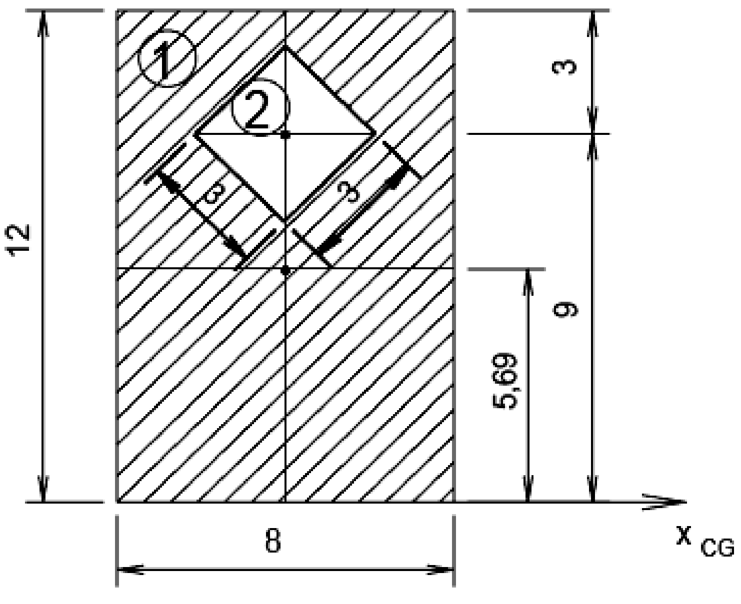
$$M_{1,x} = y_{CG1} \cdot A_1 = 7{,}5 \times (8 \times 15) = 900\, cm^3$$
$$M_{2,x} = y_{CG2} \cdot A_2 = 10 \times (6 \times 4) = 240\, cm^3$$
$$M_{3,x} = y_{CG3} \cdot A_3 = 3{,}5 \times (3 \times 4) = 42\, cm^3$$

$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x} - M_{3,x} = 900 - 240 - 42 = 618\, cm^3$$

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{618\ cm^3}{84\ cm^2} = 7{,}36\ cm$$

# Conhecimentos Básicos

- 1 - Determinar o centro de gravidade da figura abaixo:



- **Momento de inércia de uma superfície**

- O momento de inércia de uma **superfície plana** em relação a um eixo é a soma dos momentos de inércia dos elementos que a constituem, em relação ao mesmo eixo.
- O momento de inércia da superfície em relação ao eixo x será:
- $\mathbf{Ix = \Sigma y^2 \cdot dA}$
- O momento de inércia do elemento em relação ao eixo y será:
- $\mathbf{Iy = \Sigma x^2 \cdot dA}$

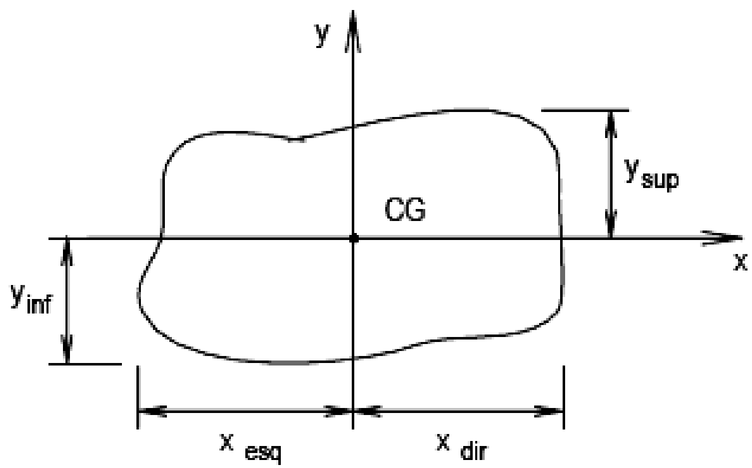
- A unidade do momento de inércia é $[L]^2 \times [L]^2 = [L]^4$.
- O momento de inércia é uma característica geométrica importantíssima no dimensionamento dos elementos estruturais, pois fornece, em valores numéricos, a resistência da peça. Quanto maior for o momento de inércia da seção transversal de uma peça, maior a sua resistência.

- **Módulo de Resistência (W)**

  - Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.

$$W_y = \frac{I_{CG}}{x_{máx}}$$

$$W_x = \frac{I_{CG}}{y_{máx}}$$



- onde:
- $Icg$ = momento de inércia da peça em relação ao CG da figura
- $x$, $y$ = distância entre o eixo do CG da figura e a extremidade da peça.
- A unidade do módulo resistente é: $[L]^3$
- O módulo resistente é utilizado para o dimensionamento de peças **submetidas à flexão**.

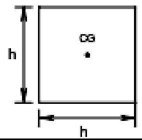
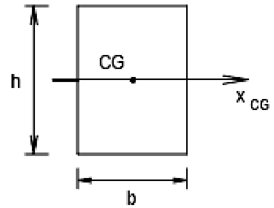
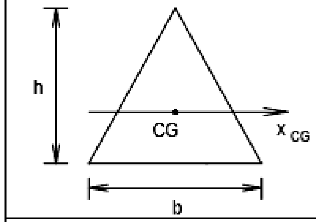
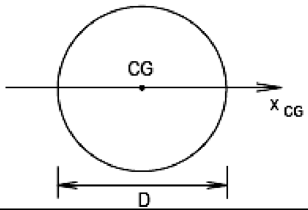
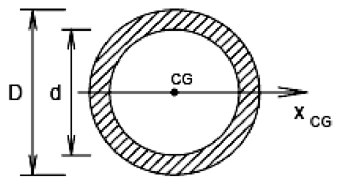
- **Raio de Giração (r)**

- Define-se raio de giração como sendo a raiz quadrada da relação entre o momento de inércia e a área da superfície. A unidade do raio de giração é o comprimento. O raio de giração é utilizado para o estudo da flambagem.
- Para o raio de giração em relação ao eixo x temos:
- $\mathbf{I_x = r^2_x \cdot A}$**,** logo:
- $$\mathbf{r_x = \sqrt{I_x} / A}$$
- Para o raio de giração em relação ao eixo y temos:
- $\mathbf{I_y = r^2_y \cdot A}$**,** logo:
- $$\mathbf{r_y = \sqrt{I_y} / A}$$

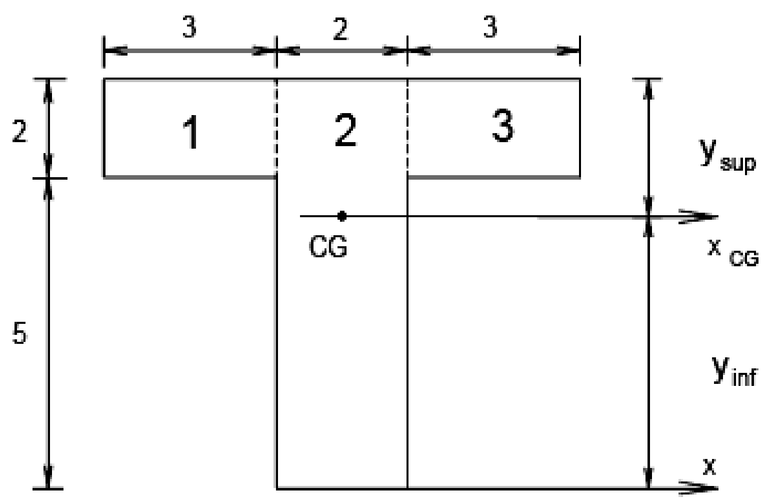
## Momento de Inércia (I)

a. O momento de inércia de uma superfície plana em relação a um eixo é a soma dos momentos de inércia dos elementos que a constituem, em relação ao mesmo eixo.

- **Módulo de Resistência (W)**
- Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.

| Figura | Momento de Inércia | Momento Resistente | Raio de Giração |
|---|---|---|---|
| *Quadrado*  | $I_x = \frac{h^4}{12}$ | $W_x = \frac{h^3}{6}$ | $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ |
| *Retângulo*  | $I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{12}$ | $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ | $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ |
| *Triângulo*  | $I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$ | $W_x = \frac{b \cdot h^2}{12}$ | $i_x = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{6}$ |
| *Círculo*  | $I_{x_{CG}} = \frac{\pi d^4}{64}$ | $W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$ | $i_x = \frac{D}{4}$ |
| *Círculo vazado*  | $I_{x_{CG}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ | $W_x = \frac{\pi(D^3 - d^3)}{32}$ | $i_x = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2}$ |

- A figura representa a seção transversal de uma viga “T”. Para a figura, determinar:
- a) o centro de gravidade;
- b) o momento de inércia em relação ao eixo x;
- c) os módulos Resistentes superior e inferior;
- d) o raio de giração.



- **Solução do exemplo da "Viga T"**
- Para facilitar a determinação das propriedades geométricas de figuras compostas, convém montar a seguinte tabela:
-

| Figura | $b$ (cm) | $h$ (cm) | $y_{CG}$ (cm) | $A$ (cm$^2$) | $M_x$ (cm$^3$) | $I_{CGi}$ (cm$^4$) | $I_{xi}$ (cm$^4$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 6 | 6 | 36 | 2 | 218 |
| 2 | 2 | 7 | 3,5 | 4 | 49 | 57,17 | 228,67 |
| 3 | 3 | 2 | 6 | 6 | 36 | 2 | 218 |
| $\Sigma$ | | | | 26 | 121 | | 664,67 |

- Centro de gravidade (CG)

$$y_{CG} = \frac{\sum M_x}{\sum A} = \frac{121}{26} = 4{,}65\ cm$$

Como o eixo de referência passa pela base da figura, então yinf = 4,65cm e ysup = 2,35cm.

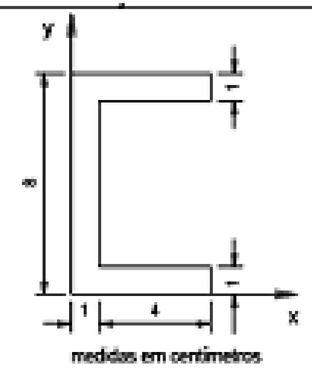
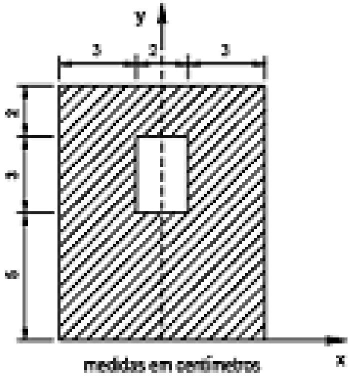
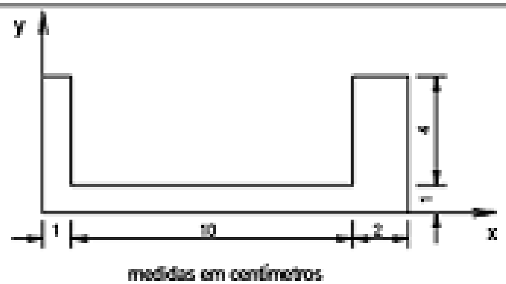
- Na coluna Icgi (cm4) foi determinado o momento de inércia de cada figura, passando pelo respectivo centro de gravidade. Por se tratar de retângulos, utilizou-se a expressão Ix = bh3/12. Em seguida, deve-se proceder à translação destes momentos de inércia para eixo x de referência para determinar a sua somatória.

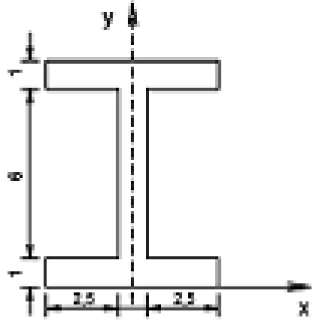
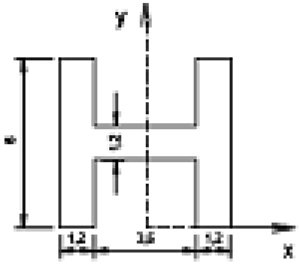
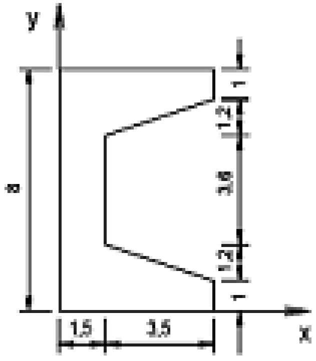
- A translação de eixos é feita por meio da expressão: *Ix = Icg + y2. A*
- Obtido o momento de inércia total em relação ao eixo x, deve-se agora proceder à translação para o eixo x que passa pelo centro de gravidade da figura, por meio da seguinte expressão:
- $$I_{CG} = I_x - \frac{M_x^2}{A} \qquad I_{CG} = 664{,}67 - \frac{121^2}{26}$$
- O momento de inércia da figura em relação ao seu centro de gravidade é *Icg* = 101,55*cm4.*
- Em seguida, calculam-se os momentos resistentes:
  $$W_{x,sup} = \frac{I_{CG}}{y_{sup}} = \frac{101{,}55}{2{,}35} = 43{,}21 \ cm^3 \qquad W_{x,inf} = \frac{I_{CG}}{y_{inf}} = \frac{101{,}55}{4{,}65} = 21{,}84 \ cm^3$$
- 

Finalmente, determina-se o raio de giração.

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{CG}}{A}} \qquad i_x = \sqrt{\frac{101{,}55}{26}} = 1{,}98 \ cm$$

- **Exercícios:**
- Determinar as características geométricas das figuras abaixo:
- a) área;
- b) centro de gravidade (*xcg* , *ycg*);
- c) momento de inércia em relação ao eixo x;
- c) momento de inércia em relação ao eixo y;
- d) módulo resistente superior e inferior;
- e) raio de giração.

| | |
|---|---|
|  | Respostas:<br>$A = 16\ \text{cm}^2$ $\quad$ $y_{CG} = 4\ \text{cm}$<br>$I_{x,CG} = 141{,}33\ \text{cm}^4$<br>$W_{sup} = 35{,}33\ \text{cm}^3$ $\quad$ $W_{inf} = 35{,}33\ \text{cm}^3$<br>$i = 2{,}97\ \text{cm}$ |
|  | Respostas:<br>$A = 86\ \text{cm}^2$ $\quad$ $y_{CG} = 5{,}105\ \text{cm}$<br>$I_{x,CG} = 683{,}73\ \text{cm}^4$<br>$W_{sup} = 139{,}67\ \text{cm}^3$ $\quad$ $W_{inf} = 133{,}94\ \text{cm}^3$<br>$i = 2{,}82\ \text{cm}$ |
|  | Respostas:<br>$A = 25\ \text{cm}^2$ $\quad$ $y_{CG} = 1{,}7\ \text{cm}$<br>$I_{x,CG} = 56{,}08\ \text{cm}^4$<br>$W_{sup} = 16{,}99\ \text{cm}^3$ $\quad$ $W_{inf} = 32{,}99\ \text{cm}^3$<br>$i = 1{,}50\ \text{cm}$ |

| | |
|---|---|
|  medidas em centímetros | Respostas: <br> $A = 18\ cm^2$ $y_{CG} = 4{,}0\ cm$ <br> $I_{x,CG} = 166\ cm^4$ <br> $W_{sup} = W_{inf} = 41{,}5\ cm^3$ <br> $i = 3{,}04\ cm$ |
|  medidas em centímetros | Respostas: <br> $A = 18{,}72\ cm^2$ $y_{CG} = 3{,}0\ cm$ <br> $I_{x,CG} = 43{,}72\ cm^4$ <br> $W_{sup} = W_{inf} = 14{,}57\ cm^3$ <br> $i = 1{,}53\ cm$ |
|  medidas em centímetros | Respostas: <br> $A = 23{,}2\ cm^2$ $y_{CG} = 4\ cm$ <br> $I_{x,CG} = 179{,}06\ cm^4$ <br> $W_{sup} = 44{,}76\ cm^3$ $W_{inf} = 44{,}76\ cm^3$ <br> $i = 2{,}78\ cm$ |

# Conhecimentos Básicos

- Próxima Aula:
  - Tensão e Deformação