



1. REVISÃO GERAL

Alguns conceitos são de fundamental importância para o bom desenvolvimento do aluno no curso de Estabilidade das Construções, uma vez que esta disciplina abrange conceitos matemáticos e físicos, além de um conhecimento do mundo ao nosso redor, Desta forma, neste capítulo será realizado uma revisão geral de alguns desses conceitos básicos.

1.1 Unidades

Uma dúvida freqüentes entres os estudantes são as relações entre os múltiplos e submúltiplos de um unidade, além de sua representação, desta forma a Tabela 1 abaixo esclarece esta relação.

Tabela 1 - Múltiplos e Submúltiplos

<i>NOME</i>	<i>SÍMBOLO</i>	<i>FATOR MULTIPLICADOR (UND)</i>
<i>Exa</i>	<i>E</i>	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
<i>Peta</i>	<i>P</i>	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
<i>Terá</i>	<i>T</i>	$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$
<i>Giga</i>	<i>G</i>	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
<i>mega</i>	<i>M</i>	$10^6 = 1\ 000\ 000$
<i>quilo</i>	<i>K</i>	$10^3 = 1\ 000$
<i>hecto</i>	<i>H</i>	$10^2 = 100$
<i>deca</i>	<i>Da</i>	10
<i>Deci</i>	<i>D</i>	$10^{-1} = 0,1$
<i>centi</i>	<i>C</i>	$10^{-2} = 0,01$
<i>Mili</i>	<i>M</i>	$10^{-3} = 0,001$
<i>micro</i>	μ	$10^{-6} = 0,000\ 001$
<i>nano</i>	<i>N</i>	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$
<i>Pico</i>	<i>P</i>	$10^{-12} = 0,000\ 000\ 000\ 001$
<i>femto</i>	<i>F</i>	$10^{-15} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$
<i>Atto</i>	<i>A</i>	$10^{-18} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$



O conhecimento das unidades básicas e a relação entre elas, se faz de grande importância na solução de problemas de do dia a dia dos profissionais de várias áreas, com o objetivo de facilitar esse entendimento é apresentada a Tabela 2 abaixo com algumas relações mais usuais.

Tabela 2 - Conversão de Unidades

UNIDADE	EQUIVALENCIA
1 MPa	1 N/mm²
1 MPa	1 x 10⁶ N/m²
1 GPa	1 x 10⁹ N/m²
1 m	100 cm
1 cm	0,01 m
1 kgf	9,81 N
1 kgf	2,20 lb
1 polegada (ou 1")	2,54 cm
1 m²	10000 cm²

1.2 - Trigonometria

A trigonometria é uma ferramenta poderosa para soluções de problemas que envolvam áreas, ângulos, decomposição de forças, em todas as áreas técnicas. O nome trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da matemática que estuda as relações entre esses ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. As relações trigonométricas podem ser observadas na Figura 1, abaixo.

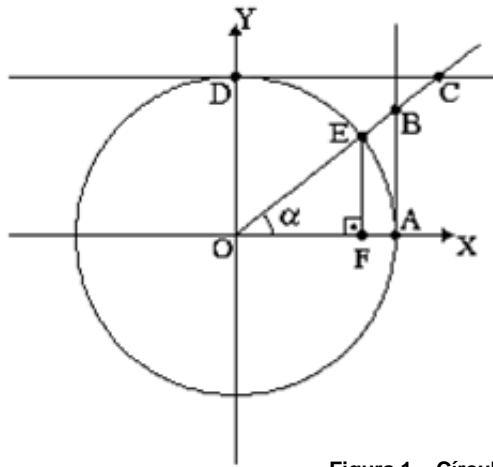


Figura 1 – Círculo e funções trigonométricas

$$\text{sen } \alpha = \overline{EF}$$

$$\text{cos } \alpha = \overline{OF}$$

$$\text{tg } \alpha = \overline{AB}$$

$$\text{cot } g \alpha = \overline{DC}$$

$$\text{sec } \alpha = \overline{OB}$$

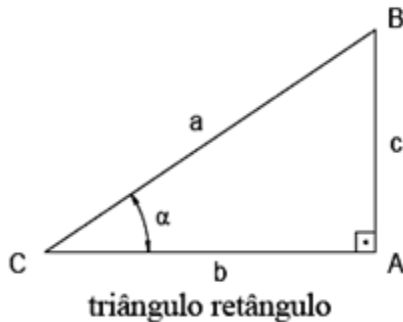
$$\text{cos sec } \alpha = \overline{OC}$$

$$\overline{OE} = R = 1$$

1.2.1 - Triângulo retângulo

No triângulo retângulo, Figura 2, os catetos são os lados que formam o ângulo de 90°. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90° e é determinada pela relação: $a^2 = b^2 + c^2$, conhecida como Teorema de Pitágoras.

a. Relações trigonométricas



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \text{arctg } \frac{c}{b}; \quad \alpha = \text{arcsen } \frac{c}{a}; \quad \alpha = \text{arccos } \frac{b}{a};$$

Figura 2 – Relações Trigonômétricas de um Triângulo Retângulo.

**Relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

As razões trigonométricas especiais são apresentadas na Tabela 2, a seguir:

b. Razões Trigonométricas Especiais

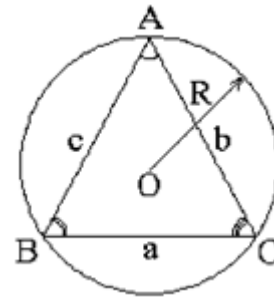
	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSENSO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1.2.2 - Triângulo qualquer

Para a solução de problemas de triângulo qualquer utilizamos as relações trigonométricas conhecidas como Lei do Seno e Lei do Cosseno, apresentadas a seguir e representada graficamente pela Figura 1.3, abaixo.

Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$$



Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Figura 1.3 – Triângulo qualquer



Introdução à Mecânica: Estática

Alfabeto Grego

Os problemas usuais em engenharia são definidos por formulações matemáticas, as quais, usualmente, utilizam letras do alfabeto grego. É, pois, necessário, seu conhecimento para as práticas comuns da Engenharia.

Nome	Símbolo		Nome	Símbolo	
	Maiúscula	Minúscula		Maiúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	PI	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Thau	T	τ
Teta	Θ	θ	Upsilon	Y	υ
Iota	I	ι	Phi	Φ	ϕ
Capa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

2. Propriedades Geométricas das Figuras Planas

O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de barras, como de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo. Daí vem a necessidade de se conhecer claramente as características ou propriedades das figuras geométricas que formam essas seções transversais.

A Figura 8.1 abaixo ilustra uma barra reta de seção transversal constante, chamada barra prismática. O lado da barra que contém o comprimento (L) e a altura (h) é chamado de seção longitudinal e o que contém a largura (b) e a altura (h) é chamado de seção transversal.

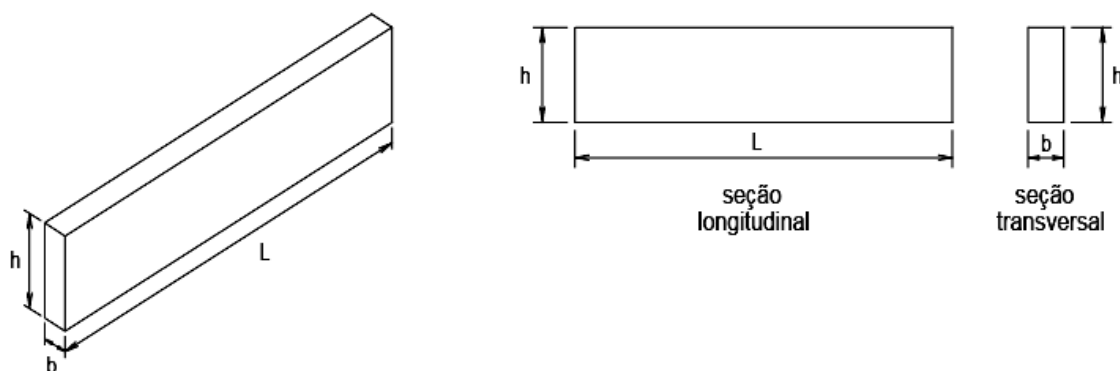


Figura 8.1 – Momento Fletor

As principais propriedades geométricas de figuras planas são:

Área (A)

Momento de Inércia (I)

Momento estático (M)

Módulo de resistência (W)

Centro de gravidade (CG)

Raio de giração (i)

a. Área (A)

A área de uma figura plana é a superfície limitada pelo seu contorno. Para contornos complexos, a área pode ser obtida aproximando-se a forma real pela justaposição de formas geométricas de área conhecida (retângulos, triângulos, etc).

A unidade de área é $[L]^2$ (unidade de comprimento ao quadrado).

A área é utilizada para a determinação das tensões normais (tração e compressão) e das tensões de transversais ou de corte.

b. Momento Estático (M)

Momento estático de um **elemento** de uma superfície plana em relação a um eixo é o produto da área do elemento pela sua distância ao eixo considerado. Logo:

O momento estático do elemento em relação ao eixo x será:

$$M'_x = y \, dA$$

O momento estático do elemento em relação ao eixo y será:

$$M'_y = x \, dA$$

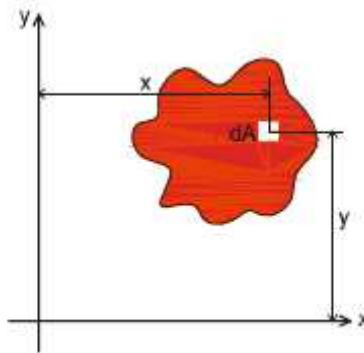


Figura 8.2 – Momento Estático (M)

Momento estático de uma **superfície plana** em relação a um eixo é a soma dos momentos estáticos, em relação ao mesmo eixo, dos elementos que formam a superfície total. Logo:

O momento estático da superfície em relação ao eixo x será:

$$M_x = \Sigma y \, dA$$

O momento estático da superfície em relação ao eixo y será:

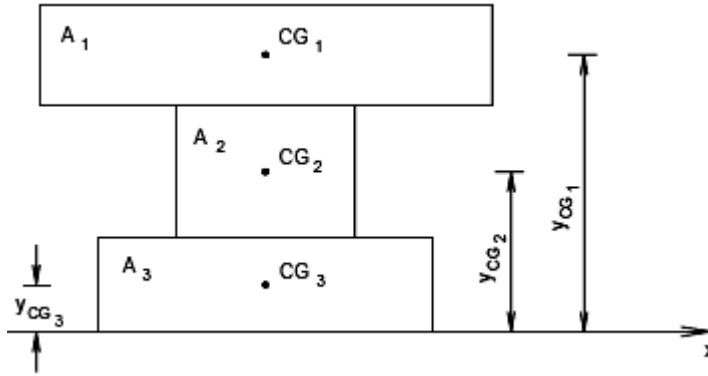
$$M_y = \Sigma x \, dA$$

Momento estático é uma grandeza escalar com dimensão $M = [L]^3$, podendo ser positivo, negativo ou nulo. É utilizado para a determinação das tensões transversais que ocorrem em uma peça submetida à flexão.

O Momento Estático de uma superfície composta por várias figuras conhecidas é a somatória dos Momentos Estáticos de cada figura.



Exemplo: determinar o Momento Estático das figuras abaixo



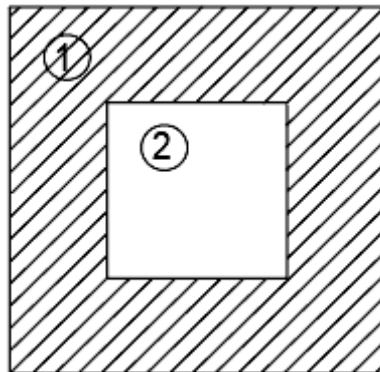
$$M_{1,x} = y_{cg1} \cdot A_1$$

$$M_{2,x} = y_{cg2} \cdot A_2$$

$$M_{3,x} = y_{cg3} \cdot A_3 \dots\dots\dots$$

$$M_x = M_{1,x} + M_{2,x} + M_{3,x}$$

Elemento Vazado



$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x}$$

c. Centro de Gravidade ou Baricentro (CG)

Se um corpo for dividido em partículas mínimas, estas ficam sujeitas à ação da gravidade, isto é, em todas estas partículas está aplicada uma força vertical atuando de cima para baixo. A resultante de todas estas forças verticais e paralelas entre si, constitui o peso do corpo.

Mesmo mudando a posição do corpo aplicando-lhe uma rotação, ele permanecerá sempre sujeito à ação da gravidade. Isto significa que as forças verticais girarão em relação ao corpo, mas continuaram sempre paralelas e verticais. O ponto onde se cruzam as resultantes dessas forças paralelas, qualquer que seja a posição do corpo, chama-se Centro de Gravidade (CG).

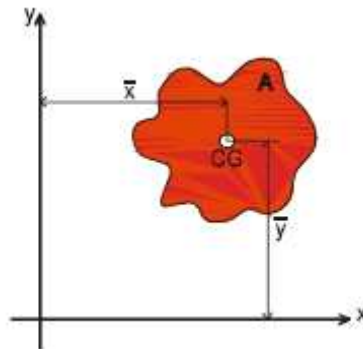


Figura 8.3 – Centro de Gravidade ou Baricentro (CG)

Portanto, atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma única força P . Esta força, chamada peso do corpo, é aplicada no seu baricentro, ou centro de gravidade (CG). O centro de gravidade pode localizar-se dentro ou fora da superfície.

Sendo CG o centro de gravidade de uma superfície plana de área A definido pelo par ordenado (x,y) tem-se as seguintes expressões:

$$M_x = y_{cg} \cdot A \quad \text{e} \quad M_y = x_{cg} \cdot A$$

que exprimem o chamado teorema dos momentos estáticos e possibilitam determinar o centro de gravidade da superfície plana, ou seja:

$$y_{cg} = M_x/A \quad \text{e} \quad x_{cg} = M_y \cdot A$$

onde:

x_{cg} = distância do CG da figura até o eixo y escolhido arbitrariamente;

y_{cg} = distância do CG da figura até o eixo x escolhido arbitrariamente;

M_x = momento estático da figura em relação ao eixo x ;

M_y = momento estático da figura em relação ao eixo y ;

A = área da Figura.

3. Propriedades do centro de gravidade

- O momento estático de uma superfície em relação a qualquer eixo baricêntrico (que passe pelo CG) é nulo.
- Se existe um eixo de simetria na peça, então o CG está contido neste eixo.

a. Centro de gravidade de área composta

Qualquer polígono pode ser decomposto em retângulos ou triângulos, cujos CGs podem ser facilmente determinados.

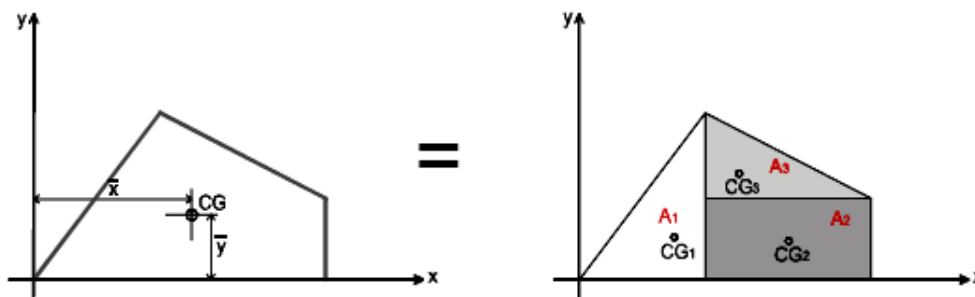


Figura 8.4 – Centro de Gravidade de área composta (CG)

O centro de gravidade de uma superfície composta por várias figuras, é expresso por:

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \qquad y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Exemplos:

1 - Determinar o centro de gravidade da figura abaixo:

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$

$$A = (8 \times 15) - (6 \times 4) - (4 \times 3)$$

$$A = 84 \text{ cm}^2$$

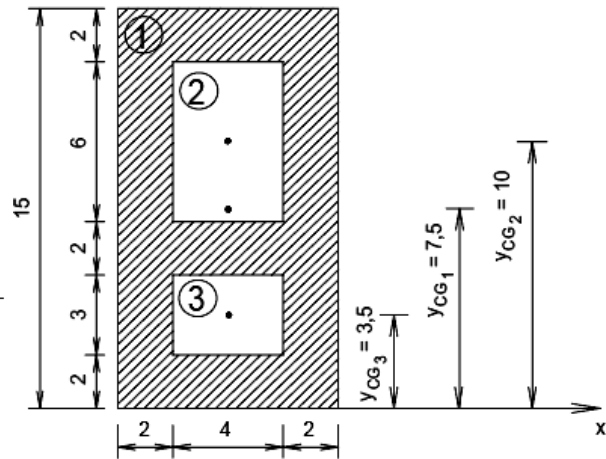
$$M_{1,x} = y_{CG1} \cdot A_1 = 7,5 \times (8 \times 15) = 900 \text{ cm}^3$$

$$M_{2,x} = y_{CG2} \cdot A_2 = 10 \times (6 \times 4) = 240 \text{ cm}^3$$

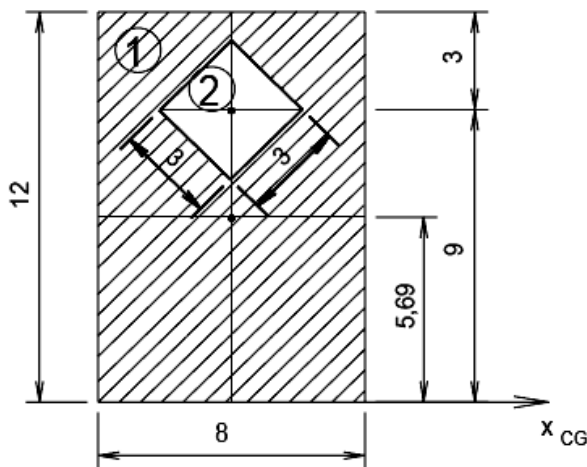
$$M_{3,x} = y_{CG3} \cdot A_3 = 3,5 \times (3 \times 4) = 42 \text{ cm}^3$$

$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x} - M_{3,x} = 900 - 240 - 42 = 618 \text{ cm}^3$$

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{618 \text{ cm}^3}{84 \text{ cm}^2} = 7,36 \text{ cm}$$



2 - Determinar o centro de gravidade da figura hachurada:



$$A_1 = (12 \times 8) = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (3 \times 3) = 9 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 87 \text{ cm}^2$$

$$M_{1,x} = 6 \times 8 \times 12 = 576 \text{ cm}^3$$

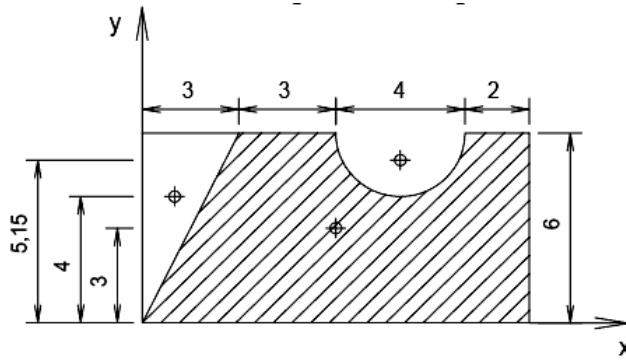
$$M_{2,x} = 9 \times 3 \times 3 = 81 \text{ cm}^3$$

$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x} = 495 \text{ cm}^3$$

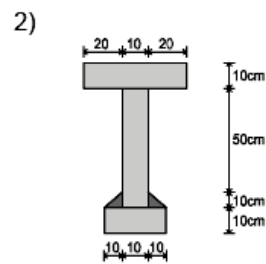
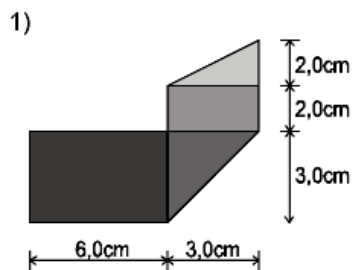
$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{495 \text{ cm}^3}{87 \text{ cm}^2} = 5,69 \text{ cm}$$



3 - Determinar o centro de gravidade da figura hachurada:

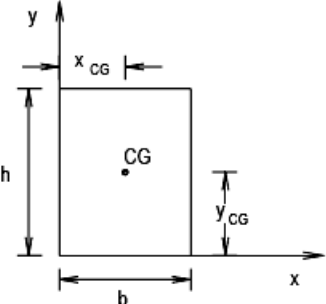
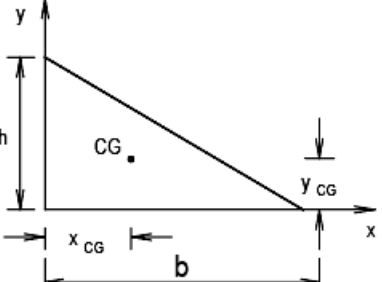
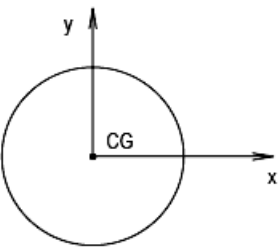
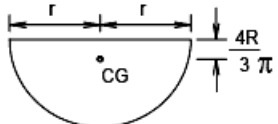
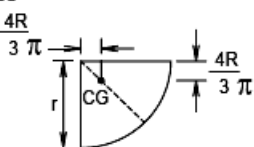
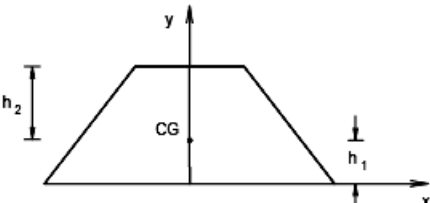


4 - Determinar as coordenadas do CG das figuras abaixo:





Centro de gravidade de algumas figuras planas

<p>retângulo</p> 	$x_{CG} = \frac{b}{2}$ $y_{CG} = \frac{h}{2}$
<p>triângulo</p> 	$x_{CG} = \frac{b}{3}$ $y_{CG} = \frac{h}{3}$
<p>círculo</p> 	$x_{CG} = 0$ $y_{CG} = 0$
<p>Semicírculo</p> 	$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
<p>¼ de círculo</p> 	$x_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$ $y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
<p>trapézio</p> 	$h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$



b. Momento de Inércia (I)

i. Momento de inércia de um elemento

O momento de inércia de um **elemento** de uma superfície plana em relação a um eixo qualquer é o produto da área do elemento pelo quadrado de sua distância ao eixo considerado.

O momento de inércia do elemento em relação ao eixo x será:

$$I'_x = y^2 \cdot dA$$

O momento de inércia do elemento em relação ao eixo y será:

$$I'_y = x^2 \cdot dA$$

Por analogia, o momento de inércia de um elemento em relação ao ponto “o” (origem do sistema de eixos) será:

$$I'_o = r^2 \cdot dA$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, tem-se:

$$I'_o = (x^2 + y^2) \cdot dA = x^2 \cdot dA + y^2 \cdot dA = I'_x + I'_y$$

O produto de inércia de um elemento em relação a um par de eixos é o produto da área do elemento pelos eixos considerados.

$$I'_{xy} = x \cdot y \cdot dA$$

ii. Momento de inércia de uma superfície

O momento de inércia de uma **superfície plana** em relação a um eixo é a soma dos momentos de inércia dos elementos que a constituem, em relação ao mesmo eixo.

O momento de inércia da superfície em relação ao eixo x será:

$$I_x = \Sigma y^2 \cdot dA$$

O momento de inércia do elemento em relação ao eixo y será:

$$I_y = \Sigma x^2 \cdot dA$$

A unidade do momento de inércia é $[L]^2 \times [L]^2 = [L]^4$.

O momento de inércia é uma característica geométrica importantíssima no dimensionamento dos elementos estruturais, pois fornece, em valores numéricos, a

resistência da peça. Quanto maior for o momento de inércia da seção transversal de uma peça, maior a sua resistência.

Propriedade:

O momento de inércia total de uma superfície é a somatória dos momentos de inércia das figuras que a compõe.

$$I_x = I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x}$$

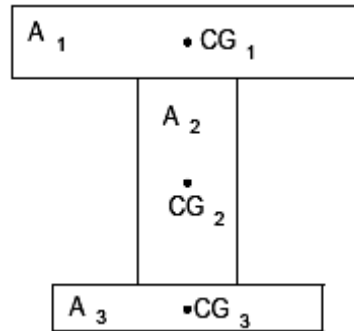
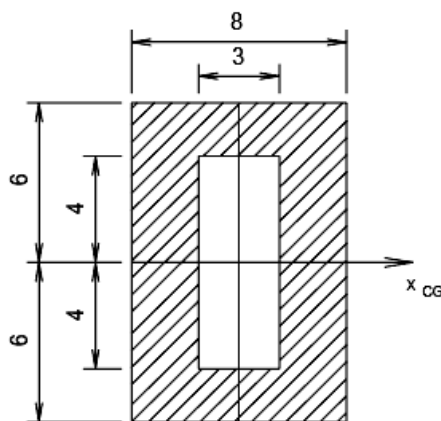


Figura 8.5 – Centro de Gravidade de área composta (CG)

Exemplo:

Determinar o momento de inércia da superfície hachurada em relação ao eixo x que passa pelo CG.



$$I_{x_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{x_{CG}} = \frac{1}{12} (8 \times 12^3 - 3 \times 8^3)$$

$$I_{x_{CG}} = 1.024 \text{ cm}^4$$

c. Translação de eixos ou Teorema de Steiner

O momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade, acrescido do produto da área (A) pelo quadrado da distância que separa os dois eixos.

$$I_x = I_{x_{cg}} + A \cdot y_{cg}^2$$

$$I_y = I_{y_{cg}} + A \cdot x_{cg}^2$$

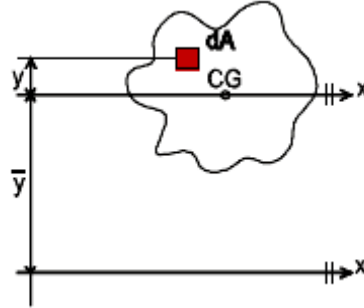


Figura 8.6 – Translação de Eixos (CG)

Onde:

I_x = momento de inércia da figura em relação ao eixo x .

I_y = momento de inércia da figura em relação ao eixo y .

I_{cgx} = momento de inércia da figura em relação ao eixo CG x que passa pelo CG da figura.

I_{cgy} = momento de inércia da figura em relação ao eixo CG y que passa pelo CG da figura.

x_{cg} = distância do eixo y até o eixo CG y .

y_{cg} = distância do eixo x até o eixo CG x .

Exemplo:

Determinar o momento de inércia do retângulo em relação aos seguintes eixos:

a) x , passando pela base inferior.

b) x_{cg} , passando pelo CG.

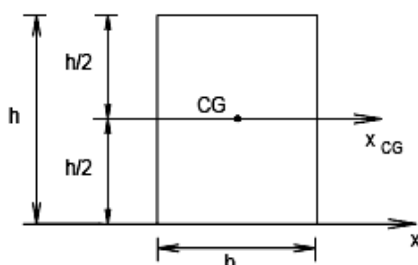
a) Utilizando a formulação de mudança de eixos:

$$I_x = I_{x_{cg}} + A \cdot y_{cg}^2$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{bh^3 + 3 \cdot bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{4b \cdot h^3}{12} \Rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$



b) Momento de inércia do retângulo em relação ao seu CG:

$$I_{x,CG} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

d. Módulo de Resistência (W)

Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.

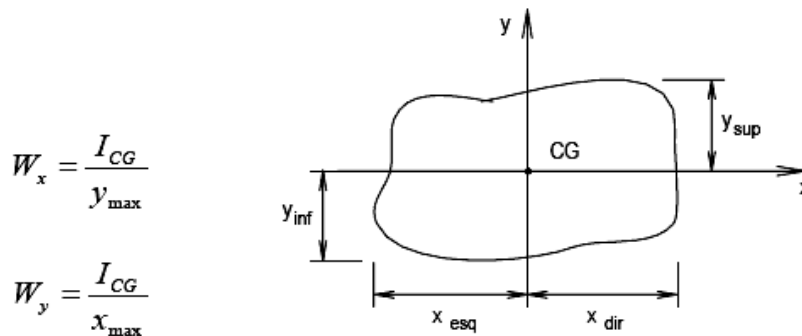


Figura 5.7 – Módulo Resistência (W)

onde:

I_{CG} = momento de inércia da peça em relação ao CG da figura

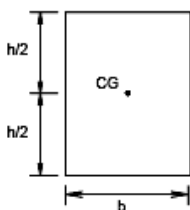
x, y = distância entre o eixo do CG da figura e a extremidade da peça.

A unidade do módulo resistente é: $[L]^3$

O módulo resistente é utilizado para o dimensionamento de peças submetidas à flexão.

Exemplo:

Para o retângulo, tem-se:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad A = b \cdot h \quad W_x = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

e. Raio de Giração (r)

Define-se raio de giração como sendo a raiz quadrada da relação entre o momento de inércia e a área da superfície. A unidade do raio de giração é o comprimento. O raio de giração é utilizado para o estudo da flambagem.

Para o raio de giração em relação ao eixo x temos:

$$I_x = r_x^2 \cdot A, \text{ logo:}$$

$$r_x = \sqrt{I_x / A}$$

Para o raio de giração em relação ao eixo y temos:

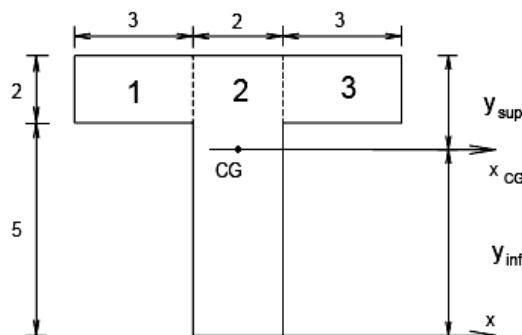
$$I_y = r_y^2 \cdot A, \text{ logo:}$$

$$r_y = \sqrt{I_y / A}$$

Exemplo:

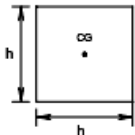
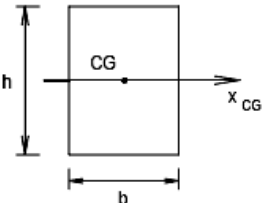
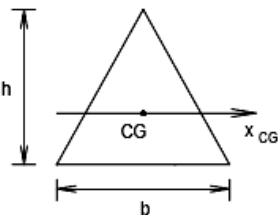
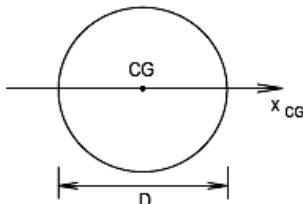
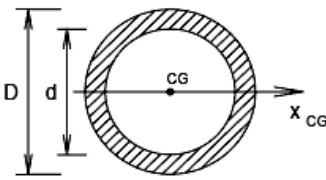
A figura representa a seção transversal de uma viga “T”. Para a figura, determinar:

- o centro de gravidade;
- o momento de inércia em relação ao eixo x;
- os módulos Resistentes superior e inferior;
- o raio de giração.





Características Geométricas de algumas figuras conhecidas

Figura	Momento de Inércia	Momento Resistente	Raio de Giração
<p>Quadrado</p> 	$I_x = \frac{h^4}{12}$	$W_x = \frac{h^3}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
<p>Retângulo</p> 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
<p>Triângulo</p> 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{12}$	$i_x = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{6}$
<p>Círculo</p> 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$	$i_x = \frac{D}{4}$
<p>Círculo vazio</p> 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$W_x = \frac{\pi(D^3 - d^3)}{32}$	$i_x = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$



Exercícios:

Determinar as características geométricas das figuras abaixo:

- área;
- centro de gravidade (x_{CG} , y_{CG});
- momento de inércia em relação ao eixo x;
- momento de inércia em relação ao eixo y;
- módulo resistente superior e inferior;
- raio de giração.

<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 16 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 141,33 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = 35,33 \text{ cm}^3$ $i = 2,97 \text{ cm}$ $y_{CG} = 4 \text{ cm}$ $W_{inf} = 35,33 \text{ cm}^3$
<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 86 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 683,73 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = 139,67 \text{ cm}^3$ $i = 2,82 \text{ cm}$ $y_{CG} = 5,105 \text{ cm}$ $W_{inf} = 133,94 \text{ cm}^3$
<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 25 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 56,08 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = 16,99 \text{ cm}^3$ $i = 1,50 \text{ cm}$ $y_{CG} = 1,7 \text{ cm}$ $W_{inf} = 32,99 \text{ cm}^3$
<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 18 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 166 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = W_{inf} = 41,5 \text{ cm}^3$ $i = 3,04 \text{ cm}$ $y_{CG} = 4,0 \text{ cm}$
<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 18,72 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 43,72 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = W_{inf} = 14,57 \text{ cm}^3$ $i = 1,53 \text{ cm}$ $y_{CG} = 3,0 \text{ cm}$
<p>medidas em centímetros</p>	<p>Respostas:</p> $A = 23,2 \text{ cm}^2$ $I_{x,CG} = 179,06 \text{ cm}^4$ $W_{sup} = 44,76 \text{ cm}^3$ $i = 2,78 \text{ cm}$ $y_{CG} = 4 \text{ cm}$ $W_{inf} = 44,76 \text{ cm}^3$



Solução do exemplo da “Viga T”

Para facilitar a determinação das propriedades geométricas de figuras compostas, convém montar a seguinte tabela:

Figura	b (cm)	h (cm)	y_{CG} (cm)	A (cm ²)	M_x (cm ³)	I_{CGi} (cm ⁴)	I_{xi} (cm ⁴)
1	3	2	6	6	36	2	218
2	2	7	3,5	4	49	57,17	228,67
3	3	2	6	6	36	2	218
Σ				26	121		664,67

Centro de gravidade (CG)

$$y_{CG} = \frac{\sum M_x}{\sum A} = \frac{121}{26} = 4,65 \text{ cm}$$

Como o eixo de referência passa pela base da figura, então $y_{inf} = 4,65\text{cm}$ e $y_{sup} = 2,35\text{cm}$.

Na coluna I_{cgi} (cm⁴) foi determinado o momento de inércia de cada figura, passando pelo respectivo centro de gravidade. Por se tratar de retângulos, utilizou-se a expressão $I_x = bh^3/12$. Em seguida, deve-se proceder à translação destes momentos de inércia para eixo x de referência para determinar a sua somatória.

A translação de eixos é feita por meio da expressão: $I_x = I_{cg} + y^2 \cdot A$

Obtido o momento de inércia total em relação ao eixo x, deve-se agora proceder à translação para o eixo x que passa pelo centro de gravidade da figura, por meio da seguinte expressão:

$$I_{CG} = I_x - \frac{M_x^2}{A} \quad I_{CG} = 664,67 - \frac{121^2}{26}$$

O momento de inércia da figura em relação ao seu centro de gravidade é $I_{cg} = 101,55\text{cm}^4$.

Em seguida, calculam-se os momentos resistentes:

$$W_{x,sup} = \frac{I_{CG}}{y_{sup}} = \frac{101,55}{2,35} = 43,21 \text{ cm}^3 \quad W_{x,inf} = \frac{I_{CG}}{y_{inf}} = \frac{101,55}{4,65} = 21,84 \text{ cm}^3$$

Finalmente, determina-se o raio de giração.

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{CG}}{A}} \quad i_x = \sqrt{\frac{101,55}{26}} = 1,98 \text{ cm}$$

1.1 Tensões e Deformações

Esforços internos

O objetivo principal deste módulo é estudar os esforços ou efeitos internos de forças que agem sobre um corpo. Os corpos considerados não são supostos perfeitamente rígidos; são corpos deformáveis de diferentes formas e submetidos a diferentes carregamentos.

Barra carregada axialmente

Considerando-se uma barra prismática (de eixo reto e seção transversal constante) sob ação de duas forças iguais e opostas, coincidentes com o seu eixo, a barra é tracionada quando as forças são direcionadas para fora da barra. Em caso contrário, a barra é comprimida.

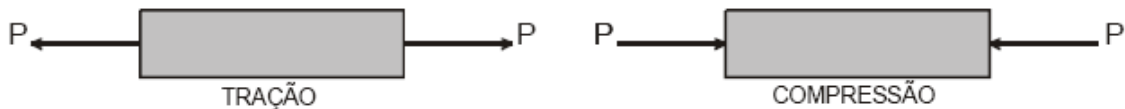


Figura 1.1 – Carregamento axial

Sob a ação dessas forças externas surgem esforços internos na barra; para o seu estudo, imagina-se a barra cortada ao longo de uma seção transversal qualquer. Removendo-se a parte do corpo situada à direita do corte, tem-se a situação onde está apresentada a ação que a parte suprimida exercia sobre o restante.

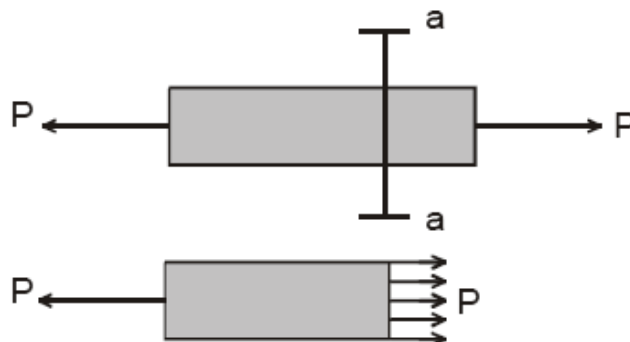


Figura 1.2 – Esforço Interno



Através deste artifício, os esforços externos na seção considerada transformam-se em internos. Para que não se altere o equilíbrio, estes esforços devem ser equivalentes à resultante, também axial de intensidade P , e devem ser perpendiculares à seção transversal considerada.

Distribuição dos esforços internos

A distribuição dos esforços resistentes ao longo de todos os pontos da seção transversal é considerada uniforme embora talvez nunca se verifique na realidade. O valor exato do esforço que atua em cada ponto é função da natureza cristalina do material e da orientação dos cristais no ponto.

Tensão normal

Quando o esforço interno resistente atuando em cada ponto da seção transversal for perpendicular à esta seção, recebe o nome de tensão normal. A tensão normal tem a mesma unidade de pressão, ou seja, força por unidade de área. No exemplo em questão, a intensidade da tensão normal em qualquer ponto da seção transversal é obtida dividindo-se a força P pela área A da seção transversal.

$$\sigma = P/A$$

Onde:

σ é a tensão normal (N/m^2 , ton/m^2 , kg/m^2 ; g/cm^2);

P é a força aplicada na seção transversal (N);

A é a área da seção transversal (m^2).

Se a força P é de tração, a tensão normal é de **tração**.

Se a força P é de compressão, a tensão normal é de **compressão**.

Corpos de prova

Para a análise de tensões e deformações, corpos de prova são ensaiados em laboratório. Os ensaios são padronizados: a forma e as dimensões dos corpos de prova variam conforme o material a ser ensaiado ou o tipo de ensaio a se realizar.

Deformação linear

Ensaiaando-se um corpo de prova à tração, com forças axiais gradualmente crescentes e medindo-se os acréscimos sofridos pelo comprimento inicial, pode-se obter a deformação linear.

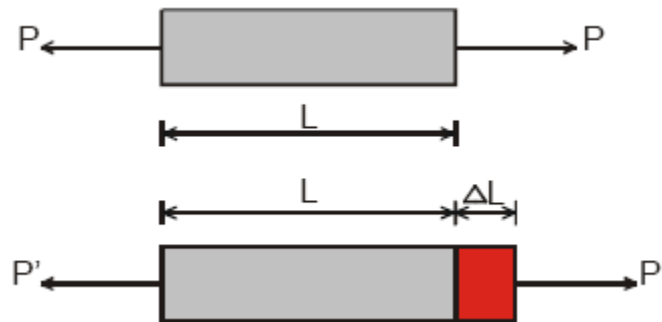


Figura 1.3 – Deformação Linear

$$\varepsilon = \Delta L/L$$

Onde:

ε é a deformação linear (adimensional);

ΔL é o acréscimo do comprimento do corpo de prova devido à aplicação da carga (m);

L é o comprimento inicial do corpo de prova (m).

1.2 Diagrama tensão x deformação

Pode-se então medir os diversos ΔL s correspondentes aos acréscimos da carga axial aplicada à barra e realizar o ensaio até a ruptura do corpo de prova. Chamando de A a área da seção transversal inicial do corpo de prova, a tensão normal σ pode ser determinada para qualquer valor de P , com a fórmula $\sigma = P/A$.

Obtêm-se, assim, diversos pares de valores σ e ϵ . A representação gráfica da função que os relaciona recebe o nome de **diagrama tensão x deformação**.

Exemplos de diagrama tensão x deformação:

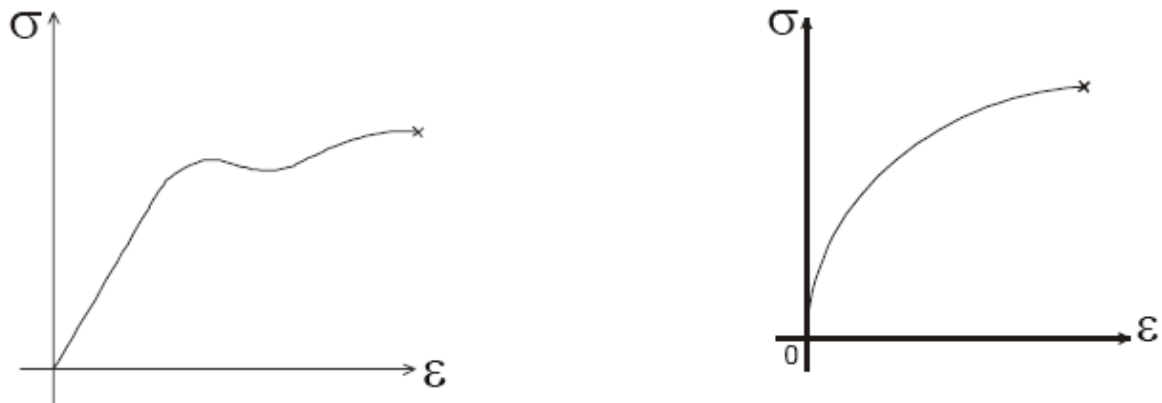


Figura 1.4 – Diagramas tensão x Deformação

O diagrama tensão x deformação varia muito de material para material e, dependendo da temperatura do corpo de prova ou da velocidade de crescimento da carga podem ocorrer resultados diferentes para um mesmo material. Entre os diagramas tensão x deformação de vários grupos de materiais é possível, no entanto, distinguir algumas características comuns que nos levam a dividir os materiais em duas importantes categorias: materiais **dúcteis** e materiais **frágeis**.

Materiais dúcteis e frágeis

Material dúctil é aquele que apresenta grandes deformações antes de se romper (aço e alumínio, por exemplo), enquanto que o frágil é aquele que se deforma relativamente pouco antes de se romper (ferro fundido e concreto, por exemplo).

1.3 Lei de Hooke

Para os materiais dúcteis, observa-se que a função tensão x deformação, no trecho OP, é linear. Esta relação linear entre os deslocamentos e as cargas axiais foi apresentada por Robert Hooke em 1678 e é conhecida como Lei de Hooke. Logo, o trecho OP do diagrama é representado por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Onde:

σ é a tensão normal (N/m^2);

E é o módulo de elasticidade do material (N/m^2) e representa a tangente do ângulo que a reta OP forma com o eixo ε ;

ε é a deformação linear (adimensional).

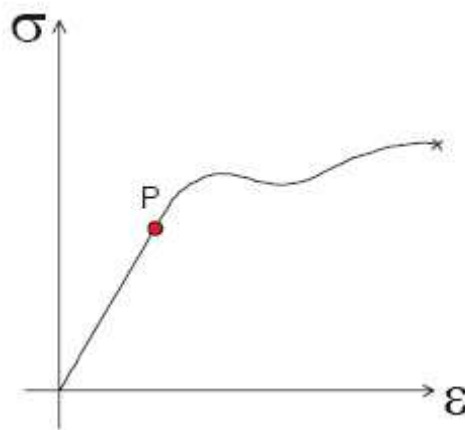


Figura 1.5 – Diagrama tensão x Deformação

Módulo de elasticidade

A constante E representa o módulo de elasticidade do material sob tração e também pode ser chamada de **Módulo de Young**. Tabelas com os módulos de elasticidade de diferentes materiais podem ser obtidas em manuais ou livros de engenharia.

Propriedades mecânicas

A análise dos diagramas tensão x deformação permite caracterizar diversas propriedades do material:

Limite de proporcionalidade: A tensão correspondente ao ponto P recebe o nome de limite de proporcionalidade e representa o valor máximo da tensão abaixo da qual o material obedece a Lei de Hooke. Para um material frágil, não existe limite de proporcionalidade (o diagrama não apresenta parte reta).

Limite de elasticidade: Muito próximo a P, existe um ponto na curva tensão x deformação ao qual corresponde o limite de elasticidade; representa a tensão máxima que pode ser aplicada à barra sem que apareçam deformações residuais ou permanentes após a retirada integral da carga externa. Para muitos materiais, os valores dos limites de elasticidade e proporcionalidade são praticamente iguais, sendo usados como sinônimos.

Região elástica: O trecho da curva compreendido entre a origem e o limite de proporcionalidade recebe o nome de região elástica.

Região plástica: O trecho da curva entre o limite de proporcionalidade e o ponto de ruptura do material; é chamado de região plástica.

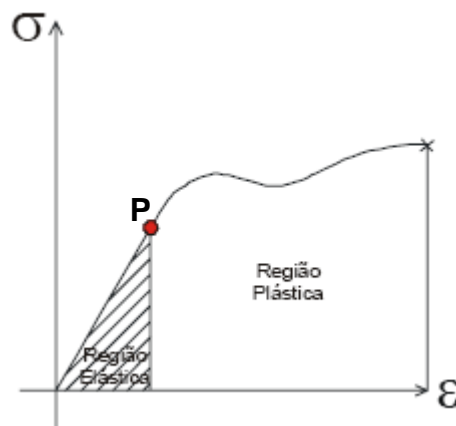


Figura 1.6 – Regiões Plásticas e Elásticas

Limite de escoamento: A tensão correspondente ao ponto Y tem o nome de limite de escoamento. A partir deste ponto, aumentam as deformações sem que se altere praticamente o valor da tensão. Quando se atinge o limite de escoamento, diz-se que o material passa a escoar-se.

Limite de resistência: (ou resistência à tração): A tensão correspondente ao ponto U recebe o nome de limite de resistência.

Limite de ruptura: A tensão correspondente ao ponto R recebe o nome de limite de ruptura (ocorre a ruptura do corpo de prova).

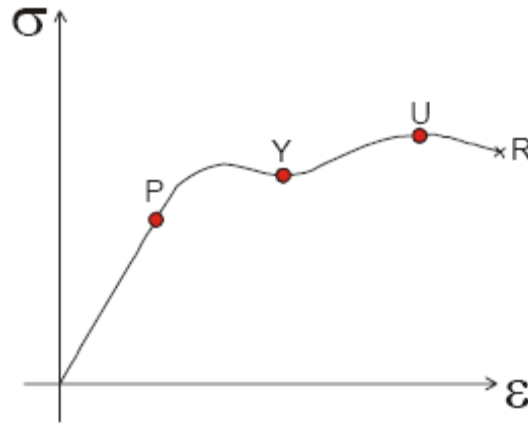


Figura 1.7 – Limites de Escoamento, Resistência e Ruptura

Tensão admissível: Obtém-se a tensão admissível dividindo-se a tensão correspondente ao limite de resistência ou a tensão correspondente ao limite de escoamento por um número, maior do que a unidade (1), denominado coeficiente de segurança. A fixação do coeficiente de segurança é feita nas normas de cálculo ou, às vezes, pelo próprio calculista, baseado em experiência própria.

$$\sigma_{adm} = \sigma_{res}/S$$

ou

$$\sigma_{adm} = \sigma_{esc}/S$$

Limite de escoamento de materiais frágeis: Denomina-se agora o limite de escoamento como a tensão que corresponde a uma deformação permanente, pré-fixada, depois do descarregamento do corpo de prova. Fixa-se ϵ_1 , traça-se a reta tangente à curva partindo da origem, traça-se uma reta paralela à tangente passando por O'; sua interseção com a curva determina o ponto Y que corresponde ao limite de escoamento procurado.

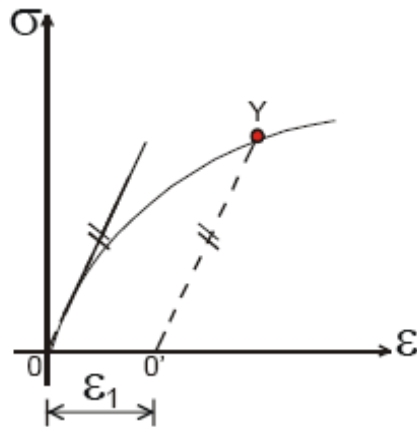


Figura 1.8 – Tensão Deformação de Materiais Frágeis

Coefficiente de Poisson: a relação entre a deformação transversal e a longitudinal verificada em barras tracionadas recebe o nome de coeficiente de Poisson (ν). Para diversos metais, o coeficiente de Poisson varia entre 0,25 e 0,35.

$\nu = |\text{deformação específica transversal} / \text{deformação específica longitudinal}|$

$$\nu = |\epsilon_y / \epsilon_x|$$

ou

$$\nu = |\epsilon_z / \epsilon_x|$$

Exercícios

1) Uma barra de 3 metros de comprimento tem seção transversal retangular de 3 cm x 1 cm. Determinar o alongamento produzido pela carga axial de 60N. O módulo de elasticidade do material é de 200 KN/mm^2 .





2) Uma barra de 30 cm de comprimento e diâmetro de 1 cm sofre um alongamento produzido por uma carga de 5 toneladas. O módulo de elasticidade do material é de 150 KN/mm^2 . Determinar o alongamento da barra.



3) Uma barra de 500 mm de comprimento e 16 mm de diâmetro é tracionada por uma carga axial de 12 kN. O seu comprimento aumenta em 0,3 mm e o seu diâmetro se reduz em 0,0024 mm. Determinar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

Parte II - Análise Estrutural

Cargas Atuantes nas Estruturas

Cargas Externas

Uma estrutura pode estar sujeita à ação de diferentes tipos de carga, tais como pressão do vento, reação de um pilar ou viga, as rodas de um veículo, o peso de mercadorias, etc. Estas cargas podem ser classificadas quanto à ocorrência em relação ao tempo e quanto às leis de distribuição.

Quanto à ocorrência em relação ao tempo:

Cargas Permanentes:

Atuam constantemente na estrutura ao longo do tempo e são devidas ao seu peso próprio, dos revestimentos e materiais que a estrutura suporta. Tratam-se de cargas com posição e valor conhecidos e invariáveis.

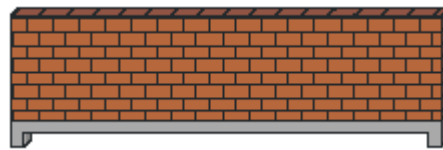


Figura 4.1 – Exemplo de carga permanente

Cargas Acidentais:

São aquelas que podem ou não ocorrer na estrutura e são provocadas por ventos, empuxo de terra ou água, impactos laterais, frenagem ou aceleração de veículos, sobrecargas em edifícios, peso de materiais que preencherão a estrutura no caso de reservatórios de água e silos, efeitos de terremotos, peso de neve acumulada (regiões frias), etc. Estas cargas são previstas pelas Normas em vigor.

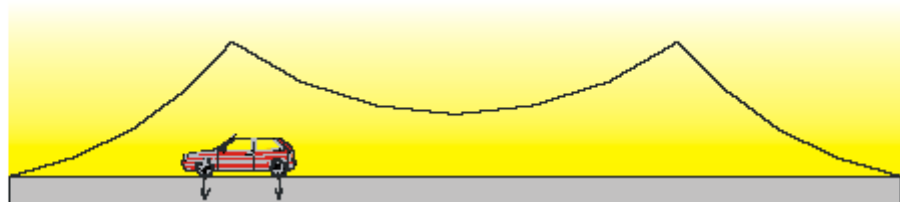
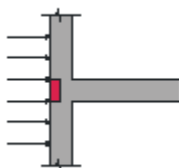


Figura 4.2 – Exemplo de carga acidental

4.1 Quanto às leis de distribuição:

Cargas concentradas:

São cargas distribuídas aplicadas a uma parcela reduzida da estrutura, podendo-se afirmar que são áreas tão pequenas em presença da dimensão da estrutura que podem ser consideradas pontualmente (ex.: a carga de um pilar de transição em uma viga, a roda de um automóvel, etc.).

Cargas distribuídas:

Podem ser classificadas em uniformemente distribuídas e uniformemente variáveis.

Uniformemente distribuídas:

São cargas constantes ao longo ou em trechos da estrutura (ex.: peso próprio, peso de uma parede sobre uma viga, pressão do vento em uma mesma altura da edificação, etc.).

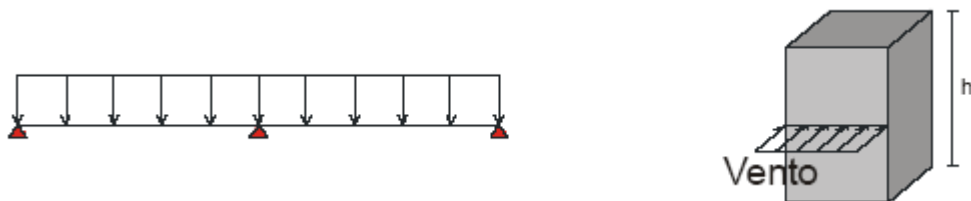


Figura 4.3 – Exemplo de carga uniformemente distribuída

Uniformemente variáveis:

São cargas triangulares (ex.: carga em paredes de reservatório de líquido, carga de grãos a granel, empuxo de terra ou água, vento ao longo da altura da edificação, etc.).

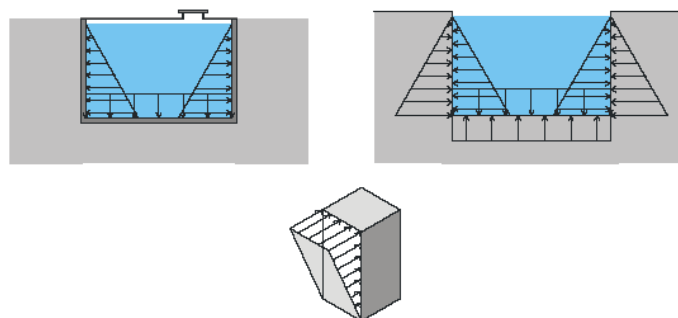


Figura 4.4 – Exemplo de uniformemente variável

Aparelhos de Apoios

A função básica dos vínculos ou apoios é de restringir o **grau de liberdade** das estruturas por meio de reações nas direções dos movimentos impedidos, ou seja, restringir as tendências de movimento de uma estrutura. Os vínculos têm a função física de ligar elementos que compõem a estrutura, além da função estática de transmitir as cargas ou forças.

Os vínculos ou apoios são classificados em função de número de movimentos impedidos. Para estruturas planas existem três tipos de vínculos:

Vínculos de Primeira Ordem (apoio simples):

São aqueles que impedem deslocamento somente em uma direção, produzindo reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida. Apenas uma reação será a incógnita.

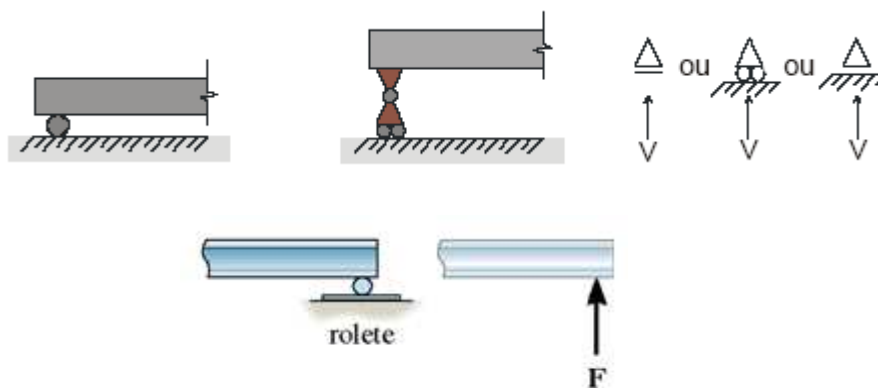


Figura 5.1 – Aparelho de Apoio do 1º Gênero (R.C.Hibbeler)

O deslocamento na direção y é impedido, logo, nesta direção, tem-se uma reação de apoio V (vertical).

Vínculos de Segunda Ordem (articulação plana):

São aqueles que restringem a translação de um corpo livre em todas as direções, mas não podem restringir a rotação em torno da conexão. Portanto, a reação

produzida equivale a uma força com direção conhecida, envolvendo duas incógnitas, geralmente representadas pelas componentes x e y da reação.

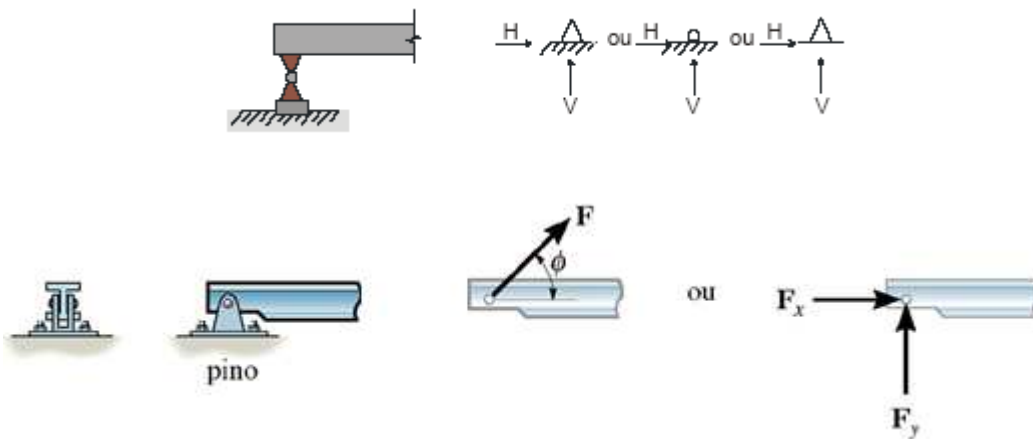


Figura 5.2 – Aparelho de Apoio do 2º Gênero (R.C.Hibbeler)

Os deslocamentos nas direções x e y são impedidos, logo, nestas direções, têm-se duas reações de apoio H (horizontal) e V (vertical).

5.1 Vínculo de Terceira Ordem (engaste ou apoio fixo):

São aqueles que impedem qualquer movimento de corpo livre, imobilizando-o completamente.

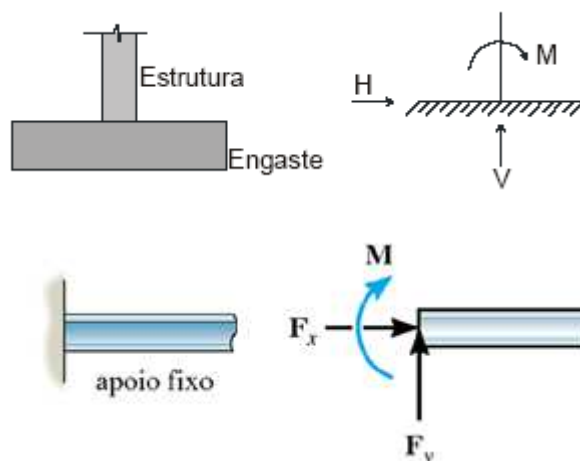


Figura 5.3 – Aparelho de Apoio do 3º Gênero (R.C.Hibbeler)

Os deslocamentos nas direções x , y e a rotação em z são impedidos, logo, nestas direções, têm-se três reações de apoio H (horizontal), V (vertical) e M (momento).

Observação: Os vínculos podem ser chamados de 1ª, 2ª e 3ª ordem ou classe ou gênero ou tipo.

Classificação da estrutura quanto à vinculação:

Isostática: Em uma estrutura isostática o número de incógnitas é igual ao número de equações, ou seja, bastam as equações fundamentais da estática para determinar as suas reações de apoio.

Hipostática: Nas estruturas hipostática os apoios são em menor número que o necessário para restringir todos os movimentos possíveis da estrutura. Ou

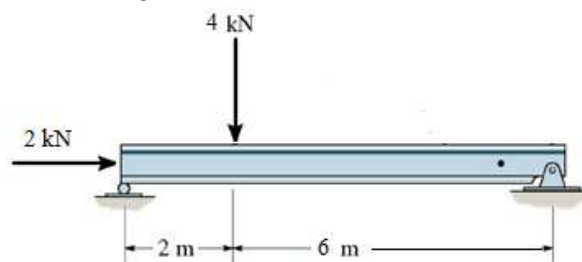
Hiperstática: Estrutura hiperestática tem número de vínculos maior que o necessário. O número de reações de apoio excede o das equações fundamentais da estática.

Estudo das Vigas Isostáticas

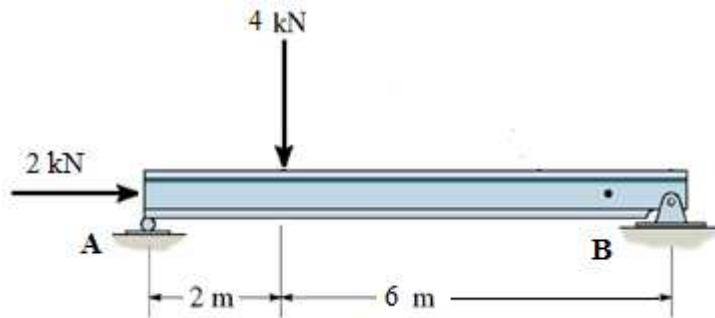
Reações de Apoio

Uma estrutura para estar em equilíbrio deve atender as equações de equilíbrio estático vistas anteriormente, este equilíbrio é garantido pelos aparelhos de apoios da estrutura. De maneira que as forças que equilibrarão o sistema provem dos mesmos, ou seja, as reações de apoio. O cálculo dessas reações é entendido de maneira mais fácil através do exemplo a seguir:

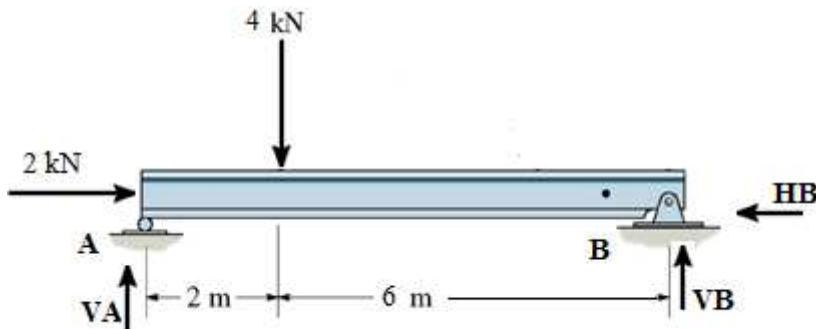
- **Determinação das reações nos apoios de uma viga isostática:**
 - **1º CASO** - 1 Carga concentrada horizontal e 1 carga concentrada vertical.



1º Passo – Dar nome as apoios, isso evita confundir a posição das reações que por ventura aparecerão.



2º Passo – Identificar os apoios quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações.



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A** (1º gênero);

VB = Reação vertical do **apoio B** (2º gênero);

HB = Reação horizontal do **apoio B** (2º gênero);

3º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, ($\rightarrow +$) ($\leftarrow -$).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$

$$2 - HB = 0$$

$$HB = 2kN;$$



Desta forma, determinamos a reação horizontal no apoio B que garante que a viga não se deslocará na horizontal.

4º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \quad (\uparrow +) \\ -4 + VA + VB &= 0 \\ VA + VB &= 4kN;\end{aligned}$$

5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, com apenas duas das equações não se pode determinar os valores de VA e VB, desta forma faz-se uso da terceira equação de equilíbrio. Escolhe-se um dos apoios como ponto de referência de momento e verificamos quais forças e reações que tendem a promover rotação neste apoio. Neste exemplo escolheremos o apoio B como referência. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário**, $\left(\overset{M}{\curvearrowright} + \overset{M}{\curvearrowleft} \right)$.

Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \quad \left(\overset{M}{\curvearrowright} + \right) \\ VA \times 8 - 4 \times 6 &= 0 \\ 8VA - 24 &= 0 \\ 8VA &= 24 \\ VA &= \frac{24}{8} \\ VA &= 3kN\end{aligned}$$

6º Passo – Com o conhecimento do valor da reação V_A , voltamos ao 4º Passo e determinamos o valor de V_B .

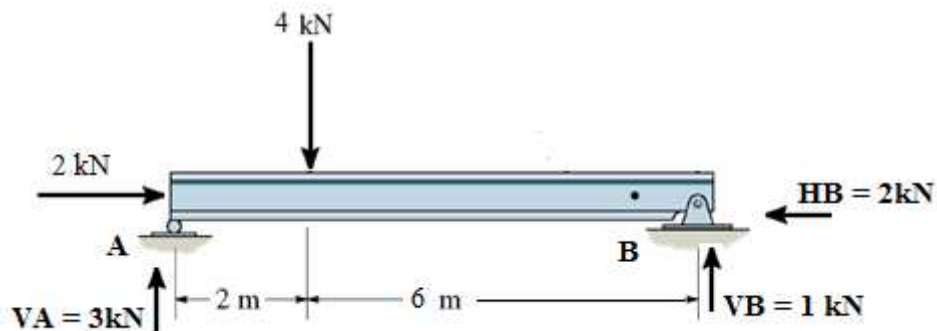
$$V_A + V_B = 4\text{kN}$$

$$3 + V_B = 4$$

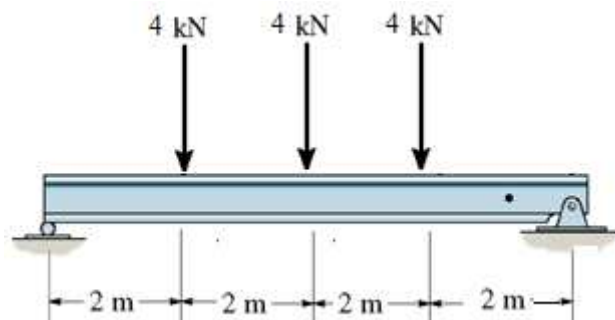
$$V_B = 4 - 3$$

$$V_B = 1\text{kN}$$

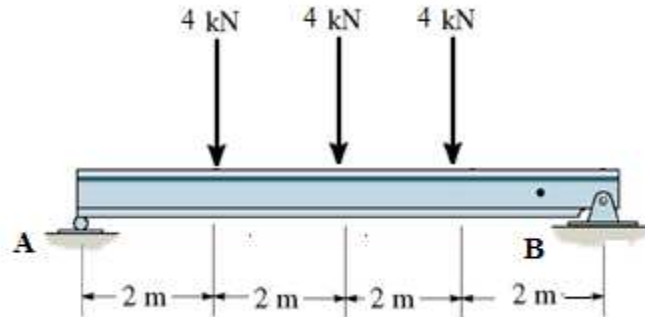
Se analisarmos a estrutura, observaremos que os resultados são compatíveis com a figura, uma vez que a força vertical, 4kN, está mais próxima do apoio A, sua reação deverá ser maior, pois está sendo mais solicitada que o apoio B. O resultado final é apresentado abaixo.



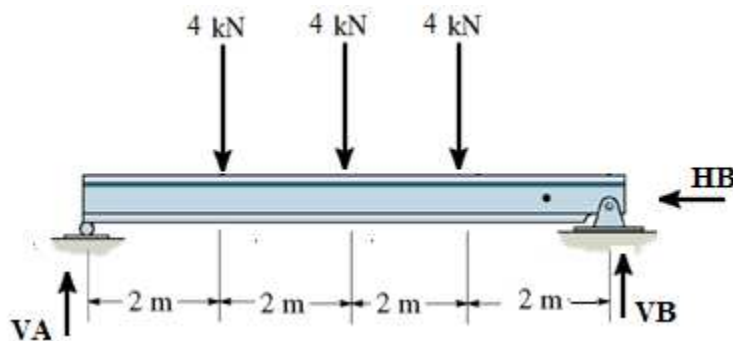
- **2º CASO** - Várias cargas concentradas na direção vertical.



1º Passo – Dar nome as apoios, isso evita confundir a posição das reações que por ventura aparecerão.



2º Passo – Identificar os apoios quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações.



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A** (1º gênero);

VB = Reação vertical do **apoio B** (2º gênero);

HB = Reação horizontal do **apoio B** (2º gênero);

3º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, ($\rightarrow +$) ($\leftarrow -$).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$

$$HB = 0$$



Como pode ser visto na figura, não existe solicitação no eixo X, desta forma, sem solicitação não haverá reação do apoio do 2º gênero na direção correspondente.

4º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \quad (\uparrow +) \\ -4 - 4 - 4 + VA + VB &= 0 \\ VA + VB &= 12kN;\end{aligned}$$

5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, com apenas duas das equações não se pode determinar os valores de VA e VB, desta forma faz-se uso da terceira equação de equilíbrio. Escolhe-se um dos apoios como ponto de referência de momento e verificamos quais forças e reações tendem a promover rotação neste apoio. Neste exemplo escolheremos o apoio B como referência. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário**, $\left(\overset{M}{+} \overset{M}{-} \right)$.

Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \quad \left(\overset{M}{+} \right) \\ VA \times 8 - 4 \times 6 - 4 \times 4 - 4 \times 2 &= 0 \\ 8VA - 24 - 16 - 8 &= 0 \\ 8VA &= 48 \\ VA &= \frac{48}{8} \\ VA &= 6kN\end{aligned}$$

6º Passo – Com o conhecimento do valor da reação V_A , voltamos ao 4º Passo e determinamos o valor de V_B .

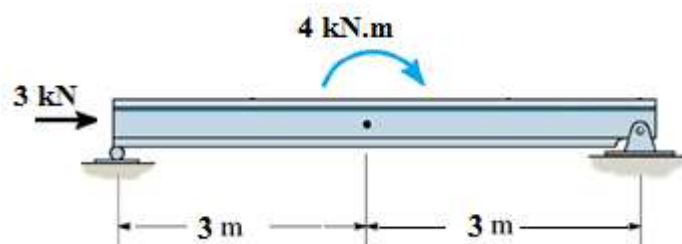
$$V_A + V_B = 12 \text{ kN}$$

$$6 + V_B = 12$$

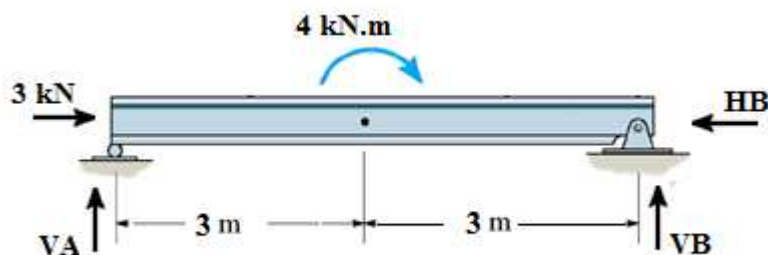
$$V_B = 12 - 6$$

$$V_B = 6 \text{ kN}$$

- **3º CASO** - Carga concentrada de momento com carga horizontal.



Solução:



$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$

$$-H_B + 3 = 0$$

$$H_B = 3 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (\uparrow +)$$

$$V_A + V_B = 0$$

Calculo de V_B

$$-0,67 + V_B = 0$$

$$V_B = 0,67 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$V_A \times 6 + 4 = 0$$

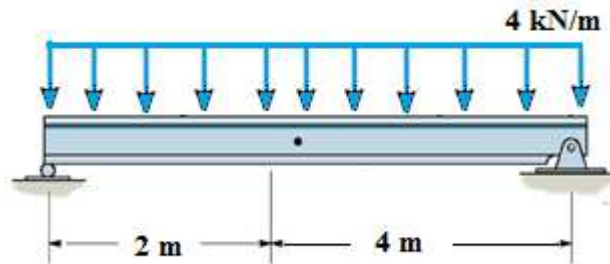
$$6V_A = -4$$

$$V_A = \frac{4}{6}$$

$$V_A = -0,67 \text{ kN}$$

$$V_A = 0,67 \text{ kN} (\downarrow)$$

- **4º CASO** - Carga uniformemente distribuída.

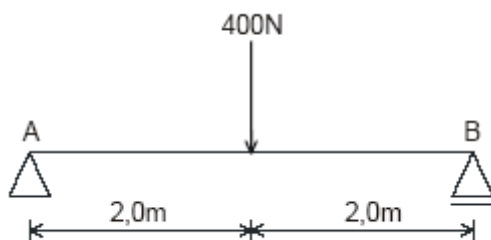


Como apresentado, para toda determinação das reações de apoio, sempre serão utilizadas as equações de equilíbrio estático. O procedimento adotado segue esse padrão, o entendimento desta etapa da análise estrutural é de fundamental importância para o desenvolvimento dos diagramas de esforços internos, assunto que será abordado com maior detalhe no futuro.

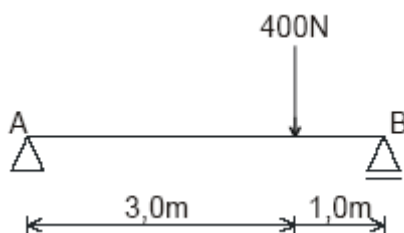
Exercícios - Reações de apoio

Determinar as reações de apoio para as estruturas dadas abaixo. Exercícios a serem resolvidos em sala de aula.

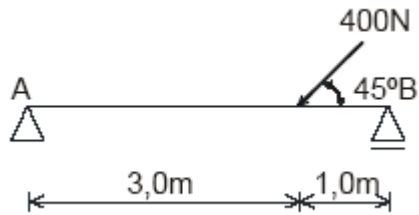
1. Viga biapoiada com carga concentrada:



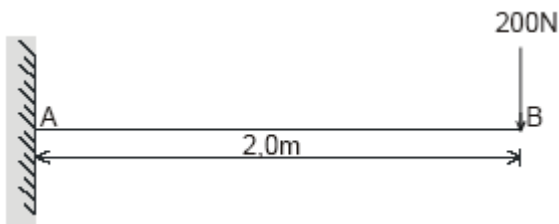
2. Viga biapoiada com carga concentrada:



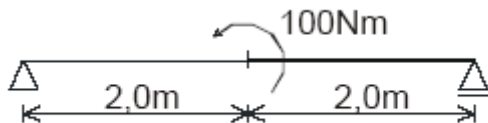
3. Viga biapoiada com carga concentrada:



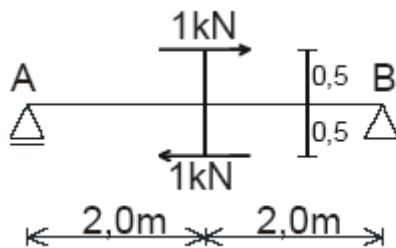
4. Viga engastada com carga concentrada:



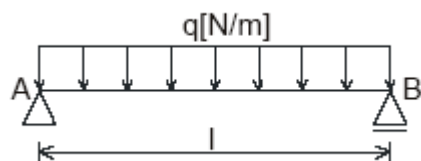
5. Viga biapoiada com momento aplicado:



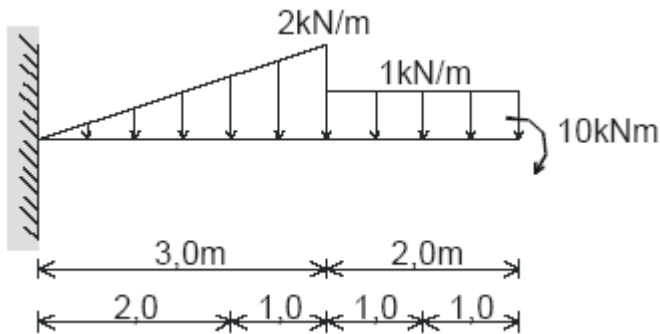
6. Viga biapoiada com cargas concentradas na direção horizontal:



7. Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída:

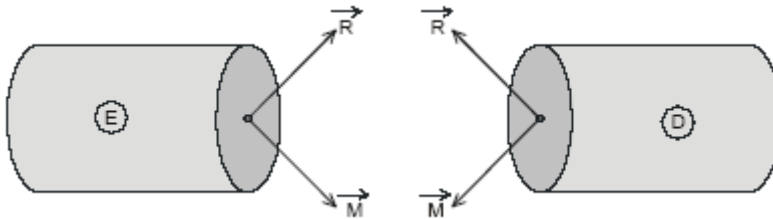


8. Viga engastada com carga uniformemente variável e uniformemente distribuída:

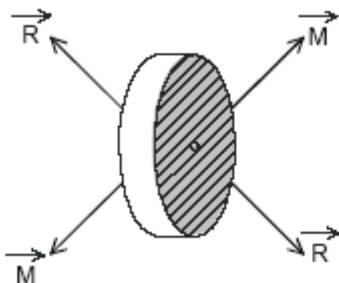


. Esforços internos

Viu-se, anteriormente, os esforços que atuam numa estrutura em equilíbrio. Veremos agora os esforços que atuam numa seção qualquer da estrutura, provocados por forças ativas e reativas. Numa seção qualquer, para manter o equilíbrio, as forças da esquerda devem ser iguais às da direita.



Uma seção S de uma estrutura em equilíbrio está submetida a um par de forças R e $-R$ e um par de momentos M e $-M$ aplicados no seu centro de gravidade, resultantes das forças atuantes à direita e à esquerda da seção.



Decompondo a força resultante e o momento em duas componentes, uma perpendicular e a outra paralela à seção, teremos:



Assim, têm-se os seguintes esforços solicitantes:

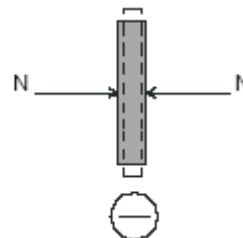
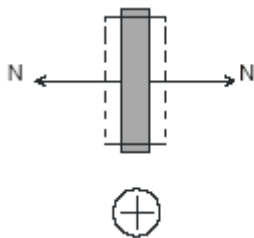
N = força normal (força perpendicular à seção S);

Q = esforço cortante (força pertencente à seção S);

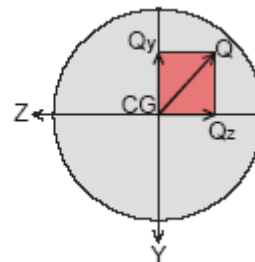
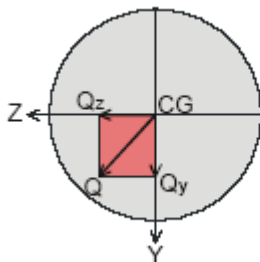
T = momento torçor (momento perpendicular à seção S);

M = momento fletor (momento pertencente à seção S).

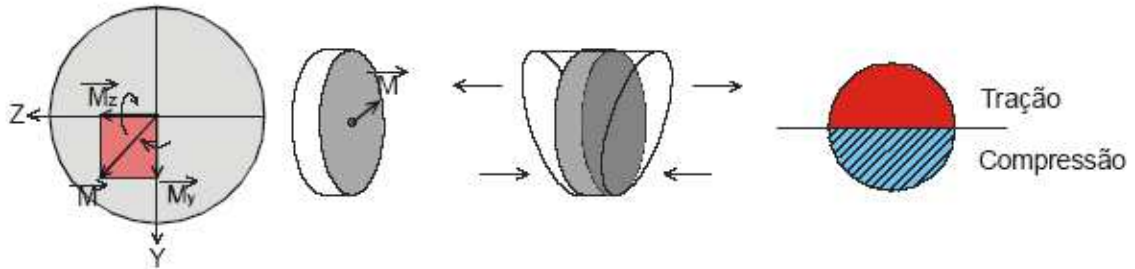
Esforço Normal (N): é a soma algébrica de todas as componentes, na direção normal à seção, de todas as forças atuantes de um dos lados da seção. Por convenção, o esforço normal é positivo quando determina tração e negativo quando determina compressão.



Esforço Cortante (Q): é a soma vetorial das componentes sobre o plano da seção das forças situadas de um mesmo lado da seção. Por convenção, as projeções que se orientarem no sentido dos eixos serão positivas e nos sentidos opostos, negativas.



Momento Fletor (M): é a soma vetorial das componentes dos momentos atuantes sobre a seção, situados de um mesmo lado da seção em relação ao seu centro de gravidade.



No caso de momento fletor, o sinal positivo ou negativo é irrelevante, importante é determinar o seu módulo e verificar onde ocorre compressão e tração.



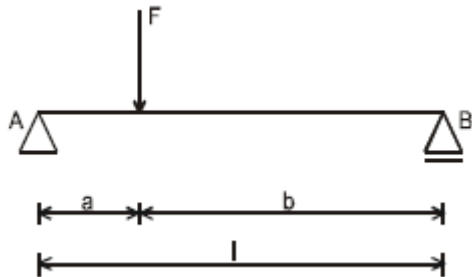
3.1. Método das seções

Imagine-se uma estrutura qualquer com forças aplicadas; considerando que as partes do corpo têm de estar em equilíbrio quando o corpo o está, e fazendo-se um corte imaginário perpendicular ao eixo da viga, qualquer parte da viga poderá ser considerada como um corpo livre. Cada um dos segmentos da viga está em equilíbrio, cujas condições exigem a existência de um sistema de forças na seção de corte da viga. Em geral, na seção de uma viga, são necessários uma força vertical, uma horizontal e um momento para manter a parte da viga em equilíbrio.

A representação gráfica dos esforços internos em qualquer ponto da viga, representados em função de uma distância x a partir de uma das extremidades da mesma, se dá através dos chamados diagramas de estado ou diagramas de esforços internos. Por meio desses diagramas é possível a determinação dos valores máximos absolutos do esforço cortante, do momento fletor e do esforço normal.

5. Vigas Biapoiadas e Diagramas de Esforços Internos

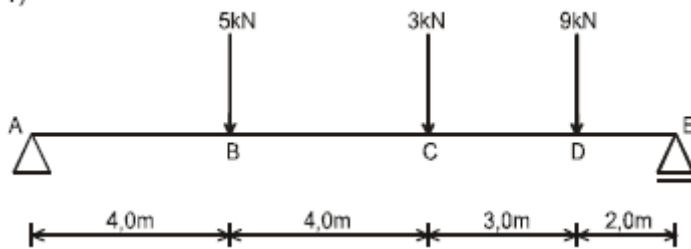
5.1. Viga Biapoiada com Carga Concentrada:



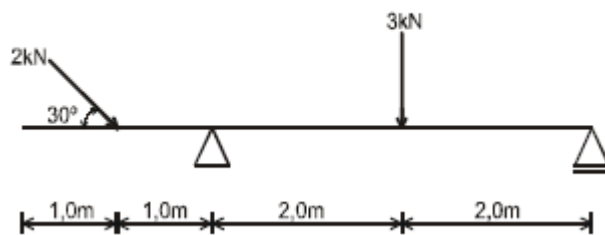
Exercícios:

A - Determine as reações de apoios e os diagramas de esforços das estruturas abaixo.

1)

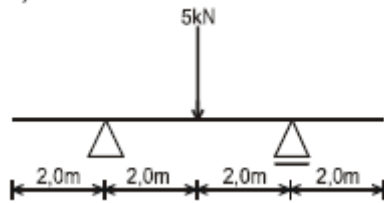


2)

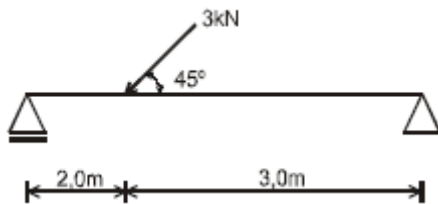




3)

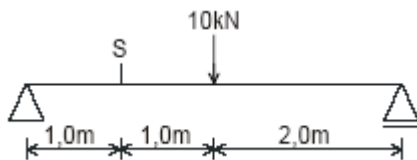


4)

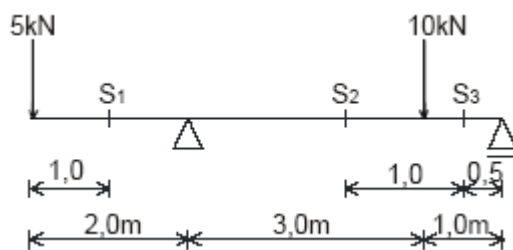


B - Determine as reações de apoios, os diagramas de esforços das estruturas abaixo e os esforços nas seções indicadas.

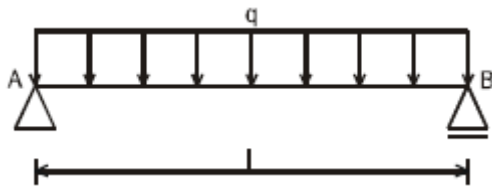
1)



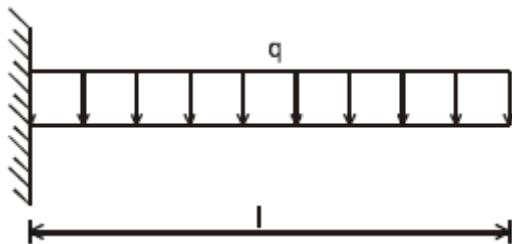
2)



5.2. Viga Biapoiada com Carga Uniformemente Distribuída:

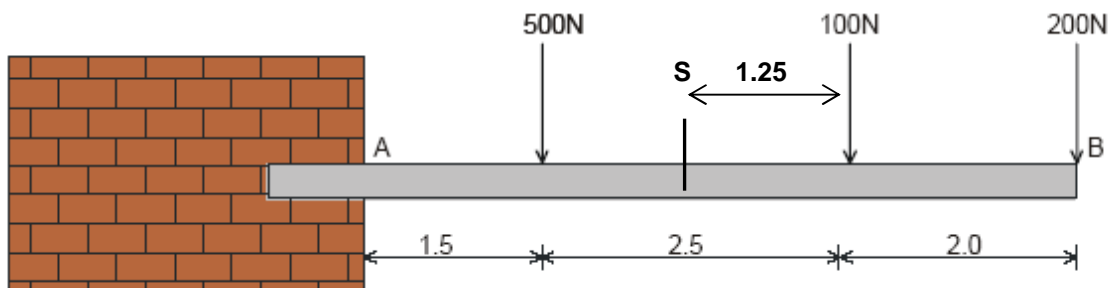


5.3. Viga Engastada com Carga Uniformemente Distribuída:



Exercícios:

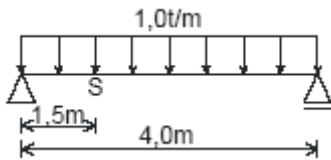
- 1) Considere a viga sendo 20x30, e lembre que o γ do concreto é 2500 kg/m³.
Faça o modelo de cálculo da viga abaixo, calcule os diagramas de esforços solicitantes na seção S.



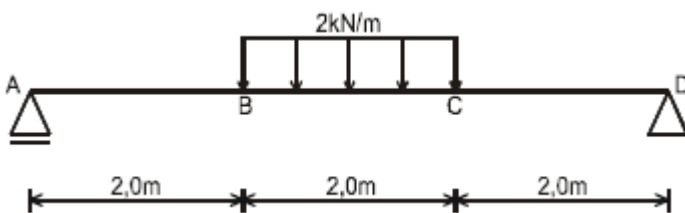


2) Calcule os diagramas de esforços solicitantes na seção S das vigas abaixo.

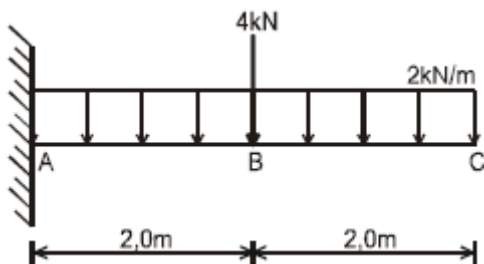
a)



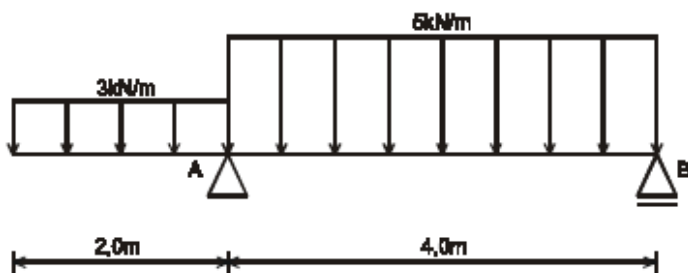
b)



c)

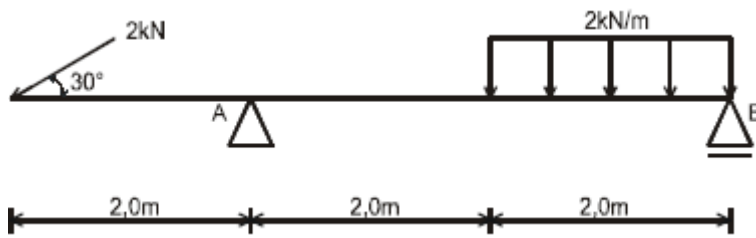


d)

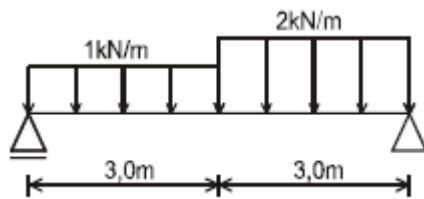




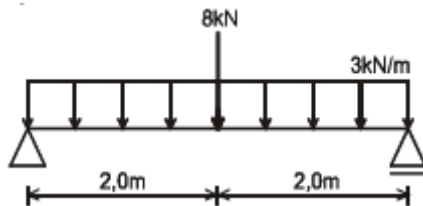
e)



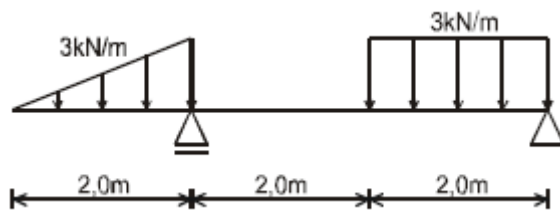
f)



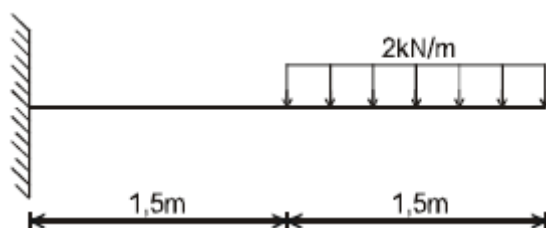
g)



h)

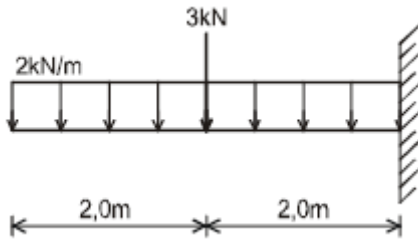


i)

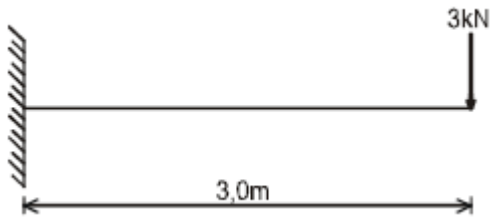




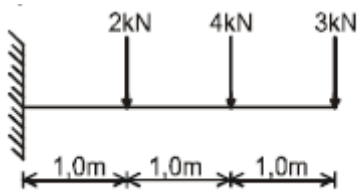
j)



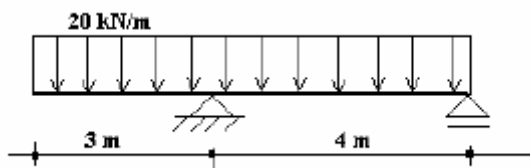
k)



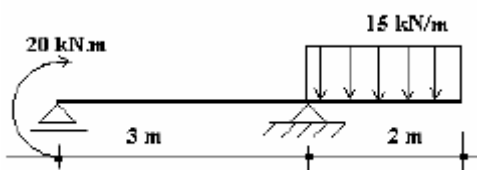
l)



m)

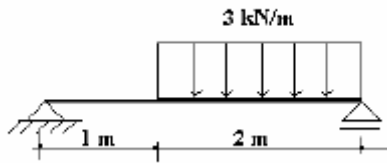


n)

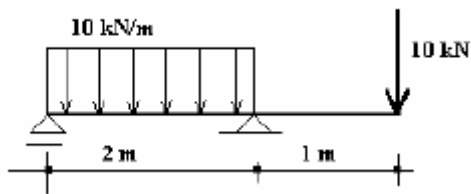




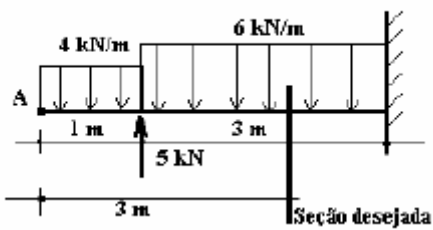
o)



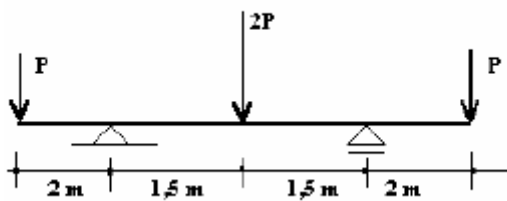
p)



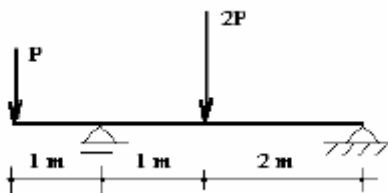
q)



r)



s)





t)

