INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

EDILBERTO BORJA

ESTRUTURA EM CONCRETO ARMADO

TECNOLOGIA EM CONSTRUÇÃO DE EDIFÍCIOS

Edilberto Vitorino de Borja

2020.1

1. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS PARA VIGAS HIPERESTÁTICAS (VIGAS CONTÍNUAS)

Vigas Contínuas: são vigas hiperestáticas com dois ou mais vãos.

Na determinação dos esforços seccionais de vigas isostáticas utilizam-se as três equações de equilíbrio da estática, necessárias e suficientes para garantir sua estabilidade.

Para as vigas hiperestáticas, as incógnitas (reações) são em número superior as três equações de equilíbrio da estática, sendo necessários então novos métodos para determinação dos seus esforços. Foram criados então vários métodos para o cálculo das reações de apoio e dos momentos fletores nos vãos. Uma vez conseguidos estes valores, pode-se calcular os momentos fletores e forças cortantes nos demais pontos da viga e consequentemente desenhar os diagramas.

Métodos de Cálculo:

- Método dos Deslocamentos
- Método dos Esforços
- Método de Cross
- Método da Equação dos Três Momentos

1.1 MÉTODO DA EQUAÇÃO DOS 3 MOMENTOS

O método apresentado a seguir trata-se de uma simplificação de modelos matemáticos avançados e é válido apenas para:

- vigas que tenham **inércia** e **módulo de elasticidade constantes**, ao longo do comprimento de toda a viga (mesma seção transversal para todos os vãos);
- carregamentos atuantes só de forças verticais e que sejam capazes de produzir binários cujo plano de rotação seja o mesmo dessas forças;
- estruturas indeformáveis quanto ao esforço axial, ou seja, sem atuação de forças horizontais. Desse modo, não se leva em consideração as reações horizontais que os apoios possam apresentar.

Nesse modelo as incógnitas hiperestáticas a serem determinadas serão os momentos atuantes nas seções transversais situadas sobre os apoios internos, uma vez que os apoios externos serão nulos ou facilmente identificáveis caso exista algum balanço nas extremidades. Em princípio, todas as incógnitas de momentos fletores existentes nos apoios internos são, supostamente, positivos, com tração nas fibras inferiores e compressão nas fibras superiores.

Na Figura 1 ilustra-se um modelo de carregamento genérico para uma viga contínua e, na Figura 2, os vãos isoladamente dessa viga contínua com a representação desses momentos nos respectivos apoios.

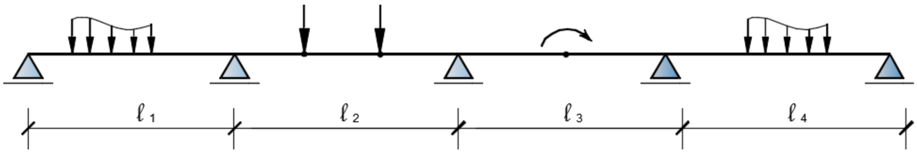


Figura 1. Modelo de viga hiperestática (viga contínua).

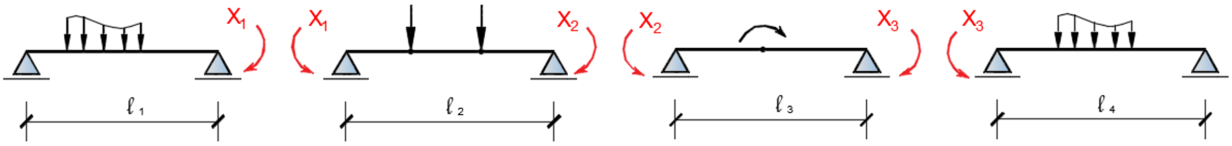


Figura 2. Vãos isolados e representação dos momentos nos apoios internos de viga contínua.

O método calcula os momentos fletores em 3 apoios (**X_{n-1}**, **X_n** e **X_{n+1}**) sequenciais de uma viga, a partir dos quais pode-se calcular os esforços atuantes (cortante e momentos fletores), em qualquer seção.

Para iniciarmos a aplicação do método, vamos escolher, uma viga contínua sujeita a um carregamento qualquer e destacar apenas dois vãos (n e n+1) e de três apoios (n-1, n e n+1) dessa viga, conforme ilustra a Figura 3.

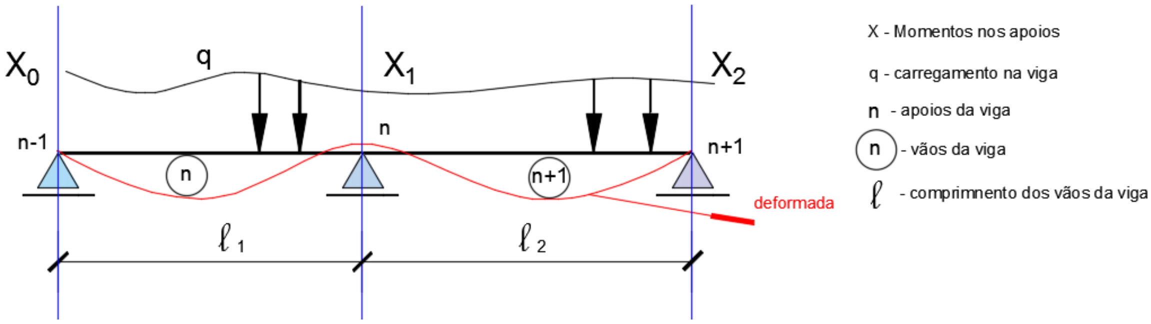


Figura 3. Viga hiperestática submetida a um carregamento qualquer.

Lembrando que a **Equação dos 3 Momentos** apresentada na Equação 1 é válida apenas para uma viga com momento de inércia constante em todos os vãos.

$$\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1})\,.\, X_n + \ell_{n+1} \,.\, X_{n+1} = -6(\mu_2^{n} + \mu_1^{n+1}) \qquad ..... \qquad \text{Equação 1.}$$

Onde:

- ℓ_n e ℓ_{n+1} :comprimento dos vãos;

- $\mathbf{X_{n-1}}$, $\mathbf{X_n}$ e $\mathbf{X_{n+1}}$: momentos nos apoios;

- μ_2^n e μ_1^{n+1}: Fatores de carga (função do tipo de carga atuante no vão).

Os fatores de carga (μ_2^n e μ_1^{n+1}), que aparecem na Equação 1, representam a contribuição do carregamento externo e dos momentos fletores nas extremidades de cada viga (vão), através de constantes provenientes das rotações no apoio comum de dois vãos adjacentes, como ilustrado na Figura 4.

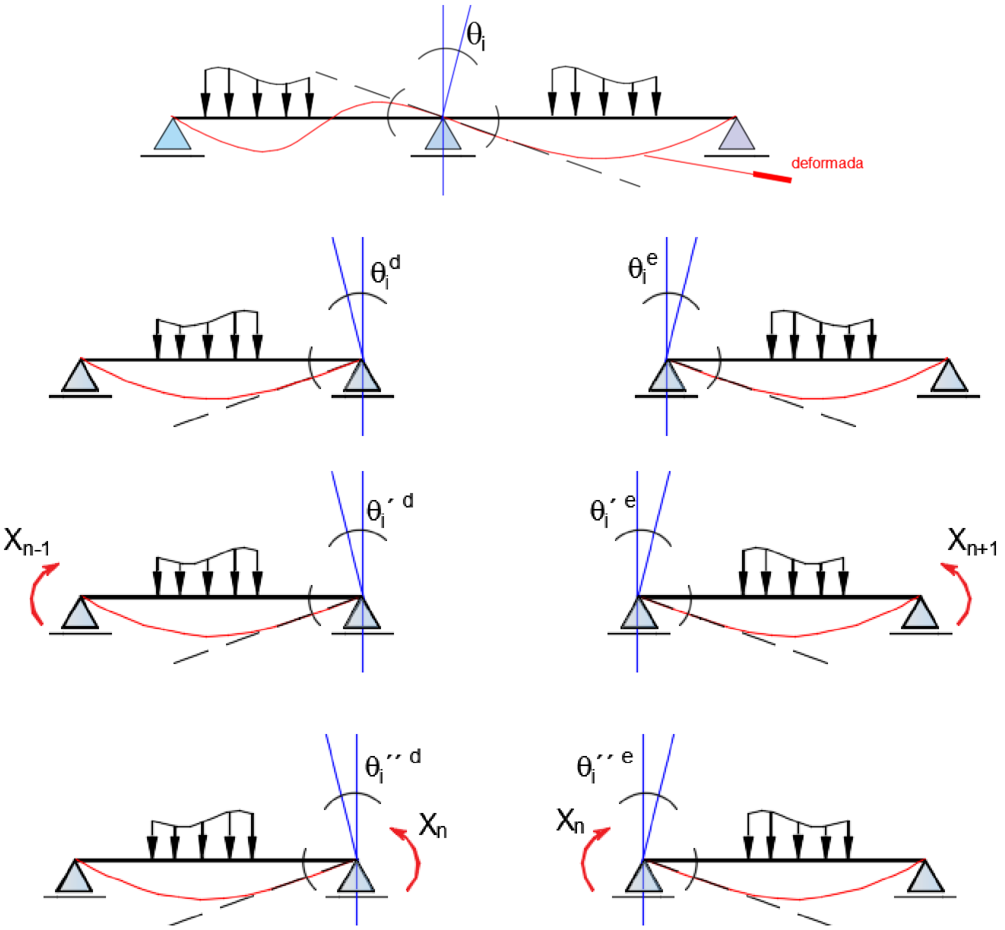
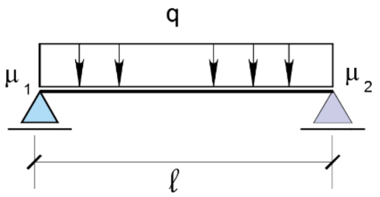
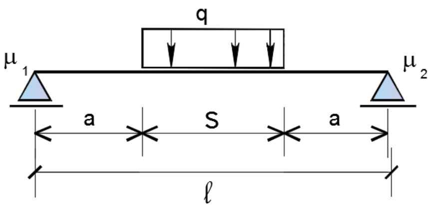
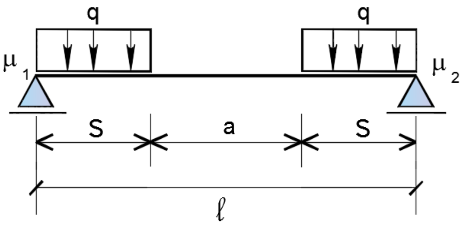
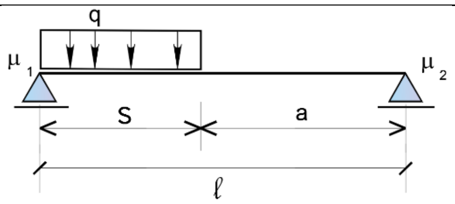
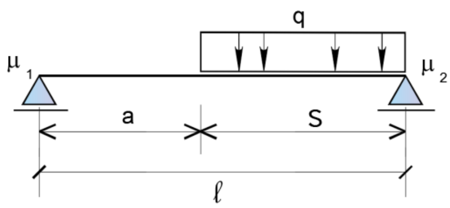
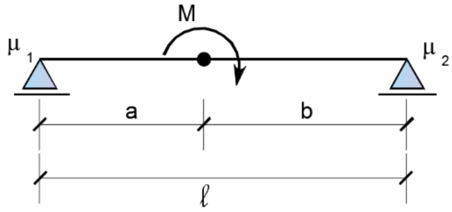


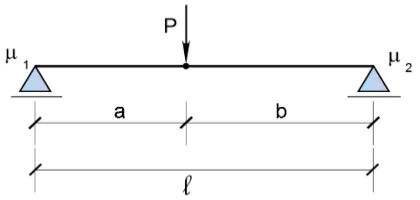
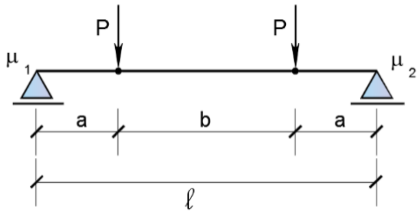
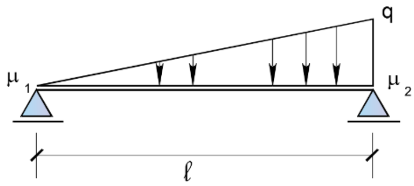
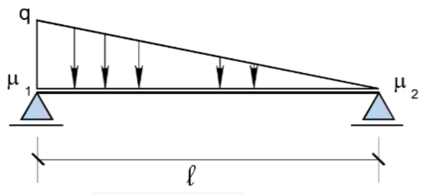
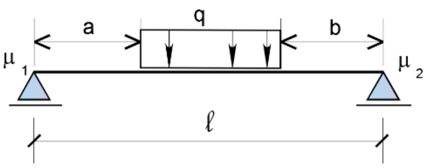
Figura 4. Carga e deformações em dois vãos adjacentes e seus efeitos na viga hiperestática submetida a um carregamento qualquer.

Essas constantes (fatores de carga) podem ser obtidas através de alguns métodos (Integração Direta e Teorema de Castigliano). No entanto, para simplificação do assunto, apresenta-se na Tabela 1 os valores dos fatores de carga (μ_2^n e μ_1^{n+1}) para alguns casos de carregamento.

É oportuno ressaltar que é válido o **princípio da superposição dos efeitos dessas ações** para o cálculo dos fatores de carga, ou seja, quando houver mais de uma carga atuando em um mesmo vão, os fatores de carga finais são dados pela soma dos fatores de carga de cada uma das cargas.

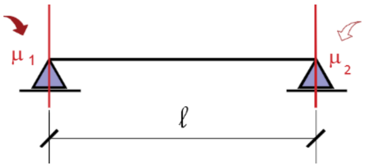
Tabela 1. Fatores de Carga (SILVA, 2004)

Tipo de Carregamento	μ_1	μ_2
	$\frac{q.\ell^3}{24}$	$\frac{q.\ell^3}{24}$
	$\frac{q.s}{48}(3\ell^2 - s^2)$	$\frac{q.s}{48}(3\ell^2 - s^2)$
	$\frac{q.s^2}{12}(2\ell + a)$	$\frac{q.s^2}{12}(2\ell + a)$
	$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell - s)^2$	$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$
	$\frac{q.s^2}{24\ell}(\ell + a)^2$	$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$
	$M\frac{\ell}{6}(\frac{3b^2}{\ell^2} - 1)$	$M\frac{\ell}{6}(1 - \frac{3a^2}{\ell^2})$

	$\frac{P.a.b}{6\ell}.(b+\ell)$	$\frac{P.a.b}{6\ell}.(a+\ell)$
	$\frac{P.a}{2}.(\ell - a)$	$\frac{P.a}{2}.(\ell - a)$
	$\frac{7.q.\ell^3}{360}$	$\frac{q.\ell^3}{45}$
	$\frac{q.\ell^3}{45}$	$\frac{7.q.\ell^3}{360}$
	$\frac{q.[\ell^4 - a^2.(2.\ell^2 - a^2) - b^2(2\ell - b)^2]}{24\ell}$	$\frac{q.[\ell^4 - a^2.(2.\ell - a)^2 - b^2(2\ell^2 - b^2)]}{24\ell}$

Observação

O índice "1", nas fórmulas de fatores de carga, indica apoio da esquerda e o índice "2" indica apoio da direita. Adotar sempre este procedimento, independente de qual trecho da viga esteja sendo analisado.



1.2 APLICAÇÕES

Para se calcular os momentos fletores em todos os apoios de uma viga contínua, deve-se aplicar a equação dos três momentos em vãos subsequentes dois a dois. O resultado é que o número total de aplicações é igual ao número de vãos menos um. Desse modo, para uma viga com quatro vãos, por exemplo, aplica-se três vezes a equação dos três momentos. Nas Figuras 5(a), 5(b) e 5(c) evidencia-se os números de aplicações do método para vigas com 2, 3 e 4 vãos, respectivamente.

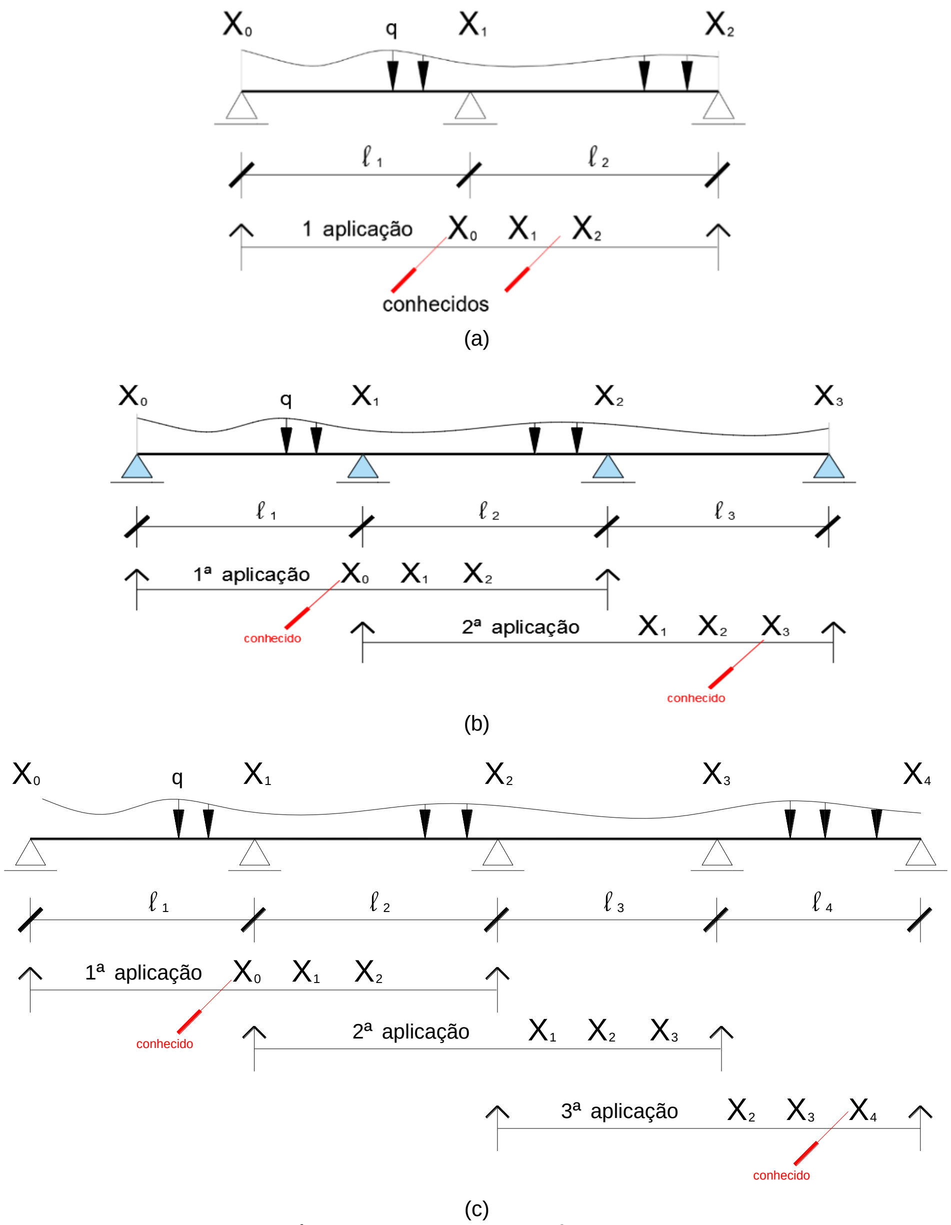


Figura 5. Viga contínua com a) dois vãos, b) três vãos e c) com quatro vãos.

Com três aplicações (Figura 5(c)), fica-se com três equações dos três momentos, uma para cada aplicação e três incógnitas (X_1, X_2 e X_3), já que os momentos X_0 e X_4 são previamente conhecidos.

1.3 EXERCÍCIOS

1.3.1 **Exercício 1**: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 6.

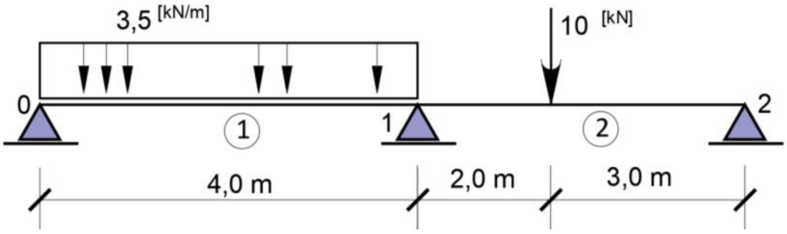


Figura 6. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$$\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1})\,.\, X_n + \ell_{n+1}\,.\, X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \,.\, X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2)\,.\, X_1 + \ell_2\,.\, X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço ou carga momento aplicada**.

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

→ **DET. DOS FATORES DE CARGA** - Consultar Tabela 1: C. Distribuída (vão 1) e C. Concentrada (vão 2).

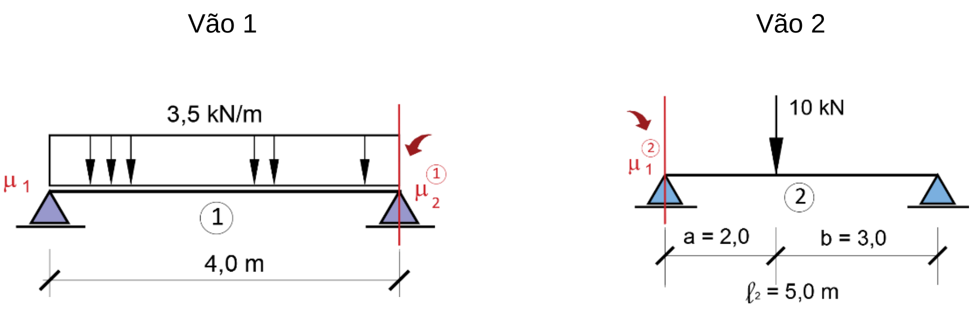


Figura 6.1. Identificação dos vãos e carregamentos da viga.

Fator de carga vão 1

$$\mu_2^1 = \frac{q.l^3}{24} = \frac{3{,}5\,.\,4^3}{24} = 9{,}33$$

Fator de carga vão 2

$$\mu_1^2 = \frac{P.a.b}{6l}.(b + l) = \frac{10.2.3}{6.5}.(3 + 5) = 16$$

→ **CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1)**

$$2(l_1 + l_2).X_1 = -6.(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$
$$2.(4{,}0 + 5{,}0).X_1 = -6.(9{,}33 + 16{,}00)$$
$$X_1 = -8{,}44 \text{ kN.m}$$

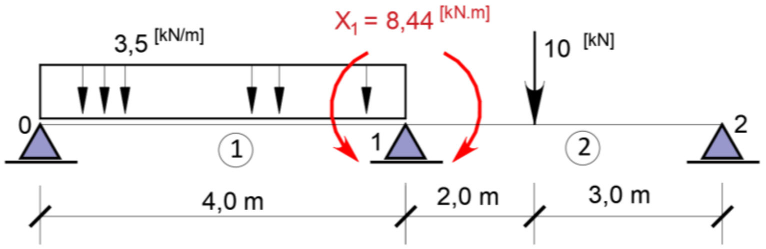


Figura 6.2. Posicionamento do Momento Negativo no apoio 1, após uso da equação dos 3 momentos.

→ **CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO**

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão (Figura 6.3). Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.

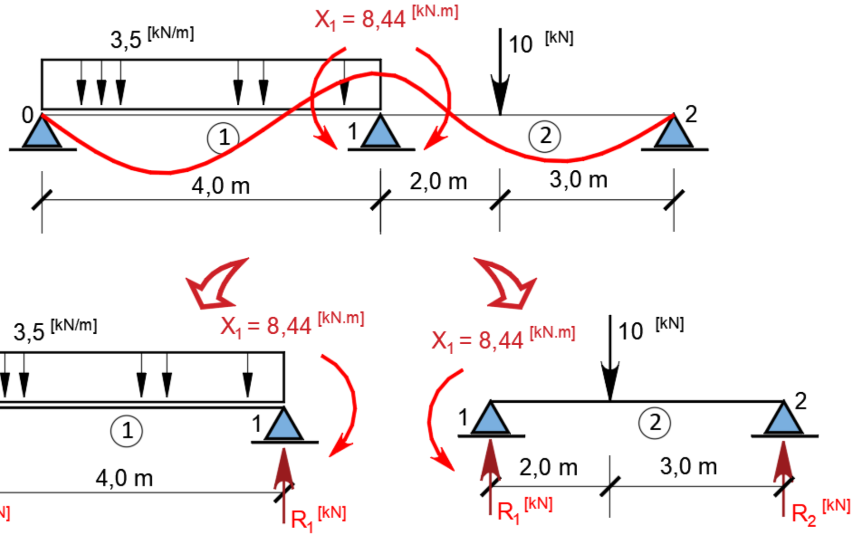
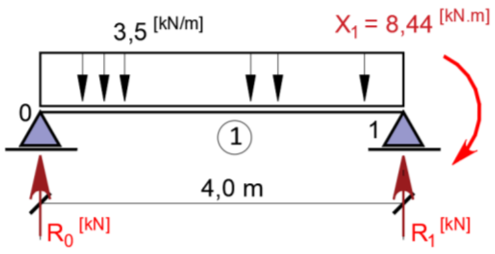


Figura 6.3. Separação dos vãos (vigas) para determinação das reações de apoio.

Para vão 1:



$$\oplus \sum M_0 = 0$$

$$3{,}5 \times 4 \times 2 + 8{,}44 - R_1 \times 4 = 0$$

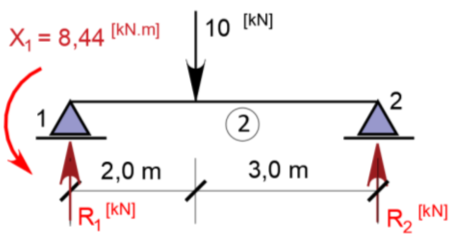
$$R_1 = 9{,}11\,\text{kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_0 + 9{,}11 - 3{,}5 \times 4 = 0$$

$$R_0 = 4{,}89\,\text{kN}$$

Para vão 2:



$$\Sigma M_1 = 0$$

$$10 \,.\, 2{,}00 - 8{,}44 - R_2 .\, 5{,}00 = 0$$

$$R_2 = 2{,}31 \text{ kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_1 + 2{,}31 - 10 = 0$$

$$R_1 = 7{,}69 \text{ kN}$$

$$R_0 = 4{,}89 \text{ kN}$$

$$R_1 = 9{,}11 + 7{,}69 = 16{,}80 \text{ kN}$$

$$R_2 = 2{,}31 \text{ kN}$$

OBSERVAÇÕES PERTINENTES:

- A reação no apoio 1 é igual a soma das reações do **apoio 1** para os vãos 1 e 2 (Figura 6.4);

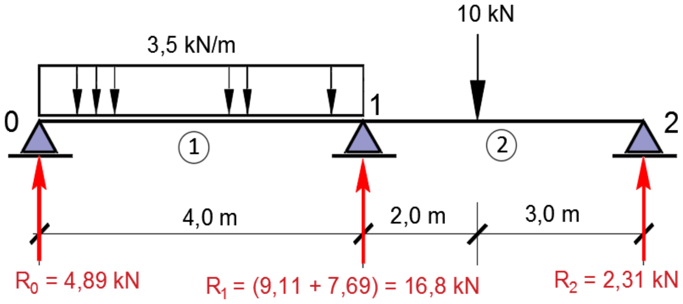
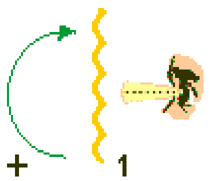


Figura 6.4. Reações de apoios.

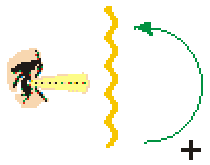
- As reações de apoio são cargas concentradas;
- Após o cálculo das reações e para cálculo dos **Esforços Solicitantes Internos**, utilizar a viga com carregamentos e reações, não sendo necessário a representação dos momentos nos apoios, uma vez que estes serão determinados normalmente nesses cálculos (Figura 10);
- Os esforços solicitantes internos (ESI) devem ser determinados nas seções-chaves (apoios, início e fim de carga distribuída, cargas concentradas);
- É indiferente olhar as cargas à esquerda ou à direita de uma determinada seção, o resultado é sempre o mesmo!!!!!!

RELEMBRANDO → CONVENÇÃO DE SINAIS - MOMENTOS

Olhando as cargas à esquerda da seção considerada: considera como positivo o momento com tendência de giro no sentido horário



Olhando as cargas à direita da seção considerada: considera como positivo o momento com tendência de giro no sentido anti-horário



Os momentos fletores deverão ser calculados nas seguintes seções-chaves: 0, 1, A, 2 (Figura 6.5).

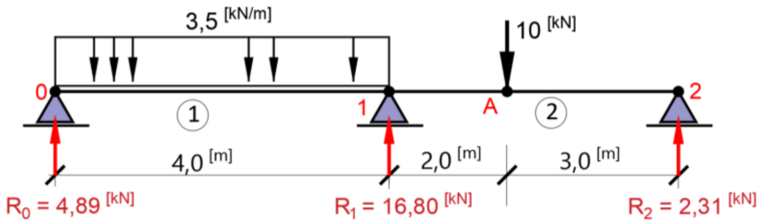
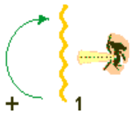


Figura 6.5. Identificação das seções-chaves e reações de apoios.

→ DETERMINAÇÃO MOMENTOS FLETORES



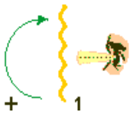
$M_0 = 0$

$M_1 = 4{,}89 \times 4{,}0 - 3{,}5 \times 4{,}0 \times 2{,}0 = -8{,}44\ kN.m$

$M_A = 4{,}89 \times 6{,}0 - 3{,}5 \times 4{,}0 \times 4{,}0 + 16{,}80 \times 2{,}0 = 6{,}94\ kN.m$

$M_2 = 4{,}89 \times 9{,}0 - 3{,}5 \times 4{,}0 \times 7{,}0 + 16{,}80 \times 5 - 10 \times 3 = 0{,}0\ kN.m$

→ DETERMINAÇÃO ESFORÇO CORTANTE



V_0 $\rightarrow V_0^a = 0$

$\rightarrow V_0^d = +4{,}89\ kN$

V_1 $\rightarrow V_1^a = +4{,}89 - 3{,}5 \times 4{,}0 = -9{,}11\ kN$

$\rightarrow V_1^d = +4{,}89 - 3{,}5 \times 4{,}0 + 16{,}80 = 7{,}69\ kN$

V_A $\rightarrow V_A^a = 7{,}69\ kN$

$\rightarrow V_A^d = +7{,}69 - 10 = -2{,}31\ kN$

V_2 $\rightarrow V_2^a = -2{,}31\ kN$

$\rightarrow V_2^d = -2{,}31 + 2{,}31 = 0\ kN$

→ **DIAGRAMA DOS ESFORÇOS** (Figura 6.6)

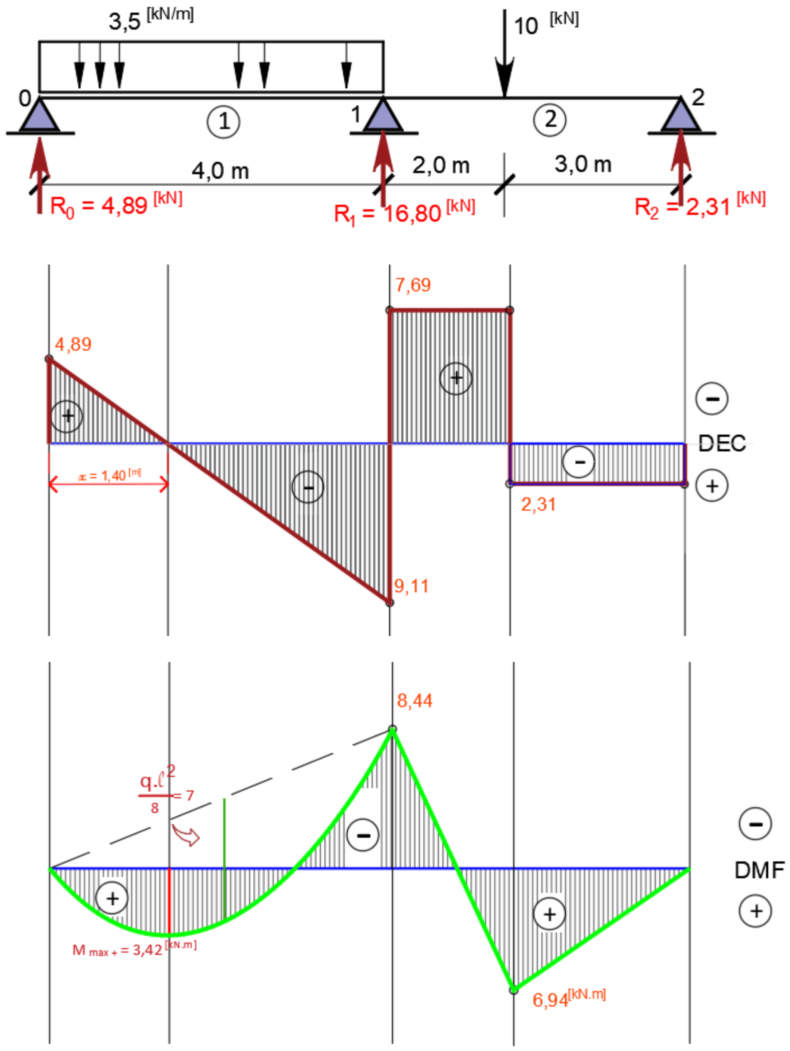


Figura 6.6. Diagrama dos Esforços Seccionais (DEC e DMF).

→ **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO POSITIVO**

ONDE O ESFORÇO CORTANTE É ZERO!!!

- Por semelhança de triângulo:

$$\frac{\mathbf{4,89}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{9,11}}{\mathbf{4-x}}$$

$$19,56 - 4,89x = 9,11x$$

$$19,56 = 9,11x + 4,89x$$

$$x = 1,40 \text{ m}$$

$$M_{max^+} = 4,89 * 1,4 - 3,5 * 1,4 * 0,7 = 3,42 \text{ kN.m}$$

1.3.2 **Exercício 2**: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 7.

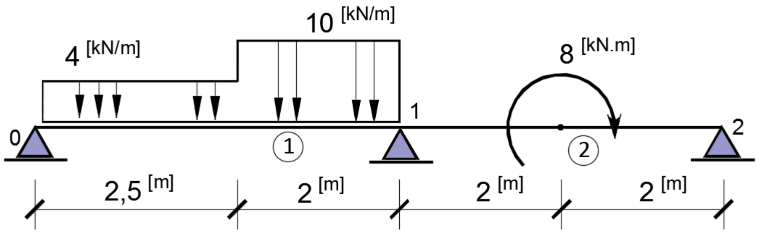


Figura 7. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \, . X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) . X_n + \ell_{n+1} \, . X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Analise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \, . X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) . X_1 + \ell_2 \, . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

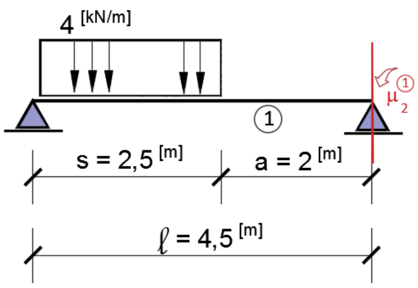
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.

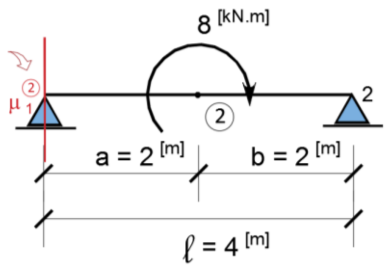
Fator de carga vão 1



$$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$$

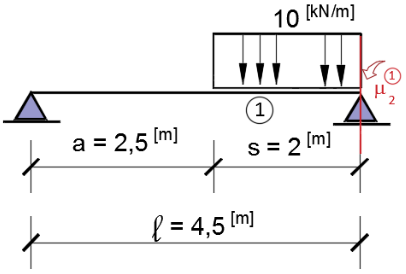
$$= \frac{4 \times 2{,}5^2}{24 \times 4{,}5}(2 \times 4{,}5^2 - 2{,}5^2) = 7{,}93$$

Fator de carga vão 2



$$M\frac{\ell}{6}\left(\frac{3b^2}{\ell^2} - 1\right)$$

$$\frac{8 \times 4}{6}\left(\frac{3 \times 2^2}{4^2} - 1\right) = -1{,}33$$

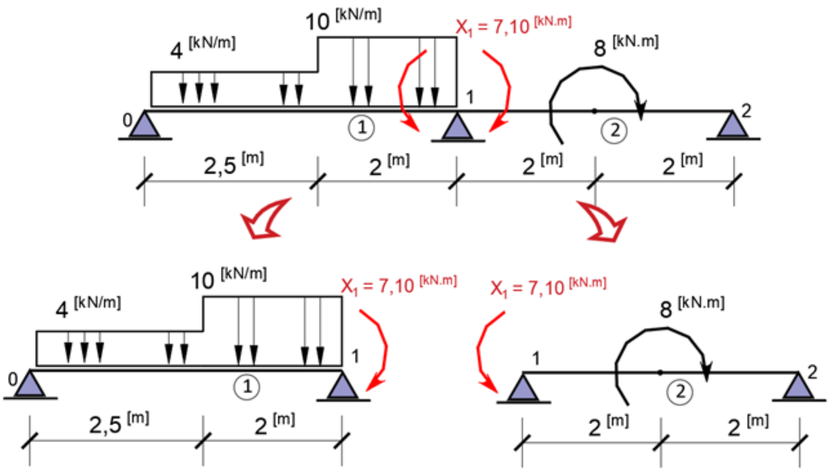


$$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$$

$$\frac{10 \times 2^2}{24 \times 4{,}5}(2 * 4{,}5^2 - 2^2) = 13{,}52$$

→ CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

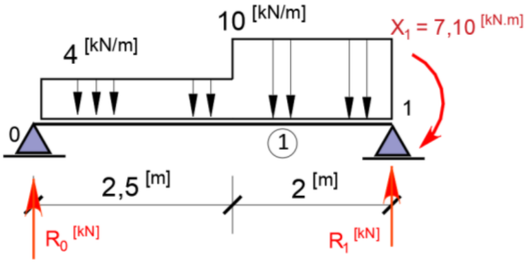
$$2(l_1 + l_2) \,.\, X_1 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$
$$2 \times (4{,}5 + 4{,}0) \times X_1 = -6 \times (7{,}93 + 13{,}52 - 1{,}33)$$
$$X_1 = -7{,}10 \text{ kN.m}$$



→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão. Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.

Para vão 1:



$$\circlearrowleft + \quad \sum M_0 = 0$$

$$+4 \times 2{,}5 \times \left(\frac{2{,}5}{2}\right) + 10 \times 2 \times (1 + 2{,}5) + 7{,}10 = 4{,}5 \times R_1$$

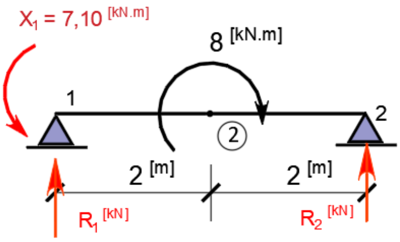
$$\boldsymbol{R_1 = 19{,}91\ kN}$$

$$\sum V = 0$$

$$R_0 + R_1 = 4 \times 2{,}5 + 10 \times 2$$

$$\boldsymbol{R_0 = 10{,}09\ kN}$$

Para vão 2:



$$\circlearrowleft + \quad \sum M_1 = 0$$

$$-7{,}10 + 8 = 4 \times R_2$$

$$\boldsymbol{R_2 = 0{,}23\ kN}$$

$$\sum V = 0$$

$$R_1 + R_2 = 0$$

$$\boldsymbol{R_1 = -R_2 = -0{,}23\ kN}$$

$$\mathrm{R_0 = 10{,}09\ kN}$$

$$\mathrm{R_1 = 19{,}91 - 0{,}23 = 19{,}68\ kN}$$

$$\mathrm{R_2 = 0{,}23\ kN}$$

→ **DIAGRAMA DOS ESFORÇOS:** Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).

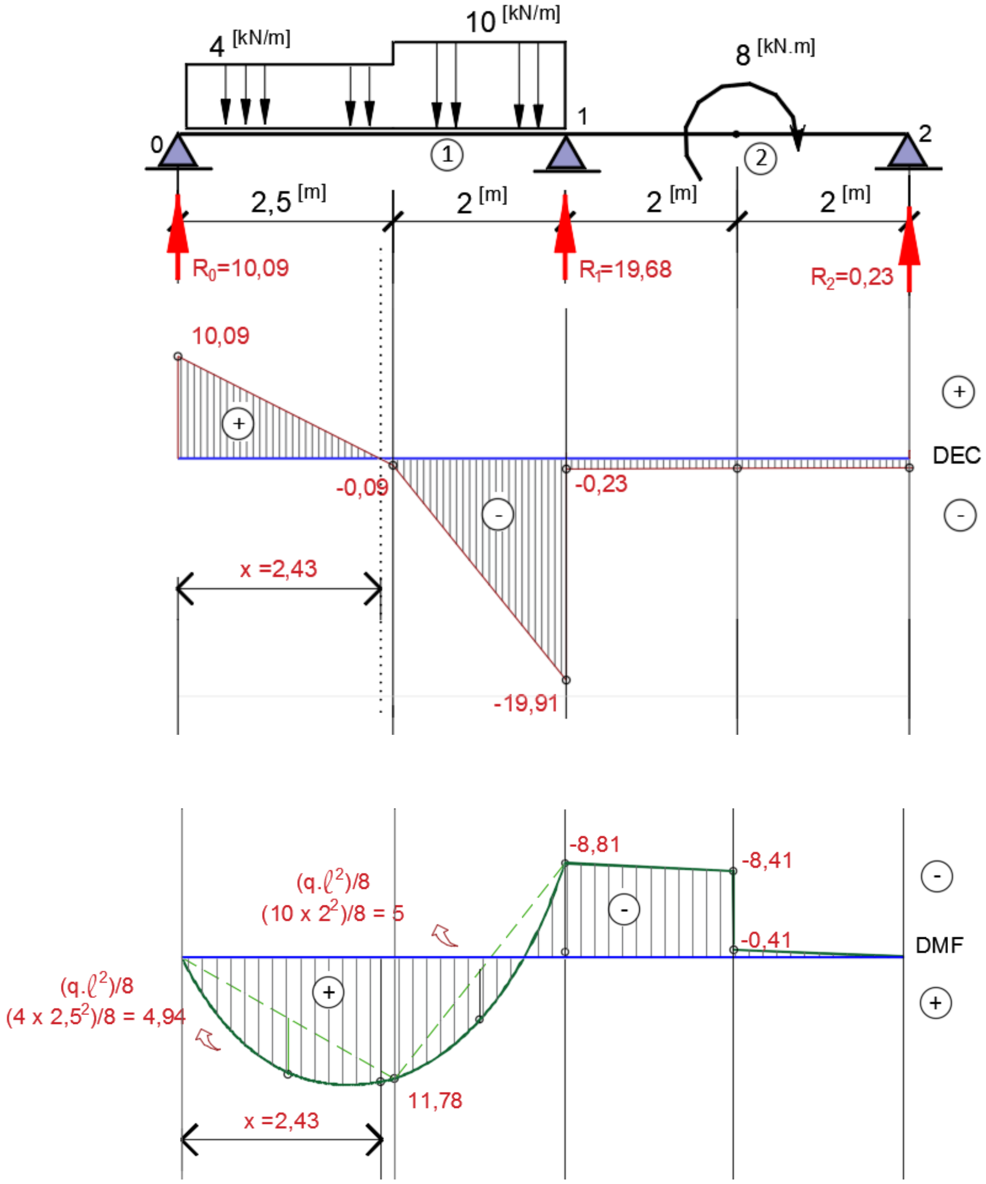


Figura 7.1. Diagrama dos Esforços Seccionais (DEC e DMF).

$$M^{+}_{max} = 10{,}09 \times 2{,}43 - 4 \times 2{,}43 \times 1{,}215 = 12{,}71\ kN.m$$

1.3.3 **Exercício 3**: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 8.

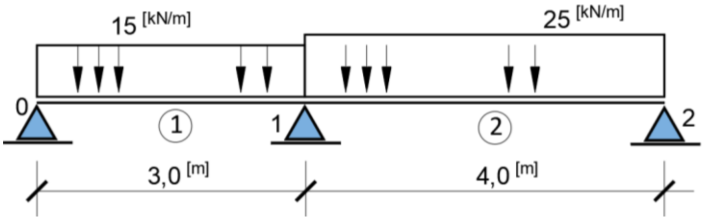


Figura 8. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \, . X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) . X_n + \ell_{n+1} \, . X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 . X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) . X_1 + \ell_2 . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

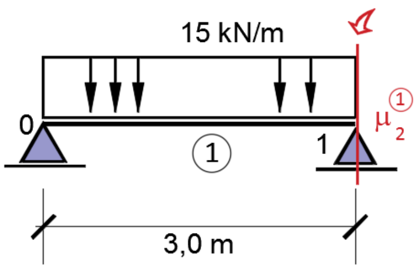
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

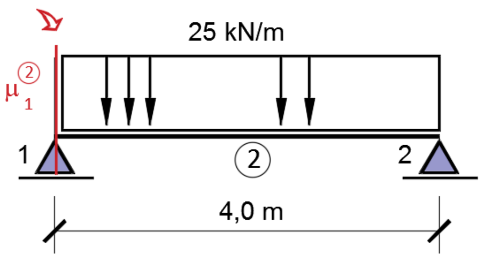
DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.

Fator de carga vão 1



$$\mu_2^1 = \frac{ql^3}{24} = \frac{15 \times 3{,}0^3}{24} = 16{,}875$$

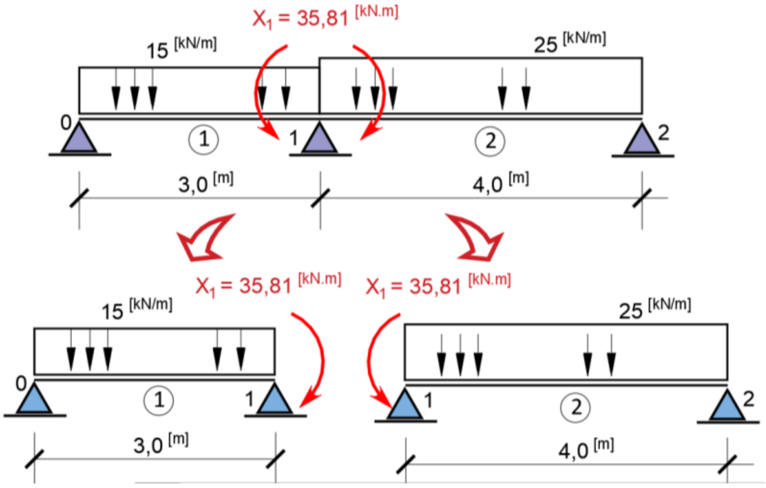
Fator de carga vão 2



$$\mu_1^2 = \frac{q \times l^3}{24} = \frac{25 \times 4^3}{24} = 66{,}67$$

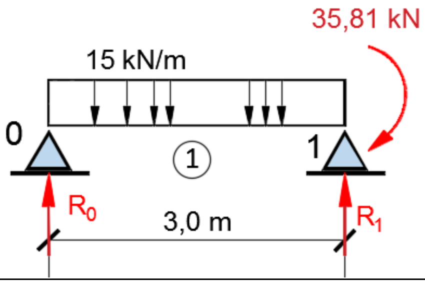
CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X1).

$$2(\ell_1 + \ell_2)\,.\,X_1 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$
$$2 \times (3{,}0 + 4{,}0) \times X_1 = -6 \times (16{,}875 + 66{,}67)$$
$$X_1 = -35{,}81 \text{ kN.m}$$



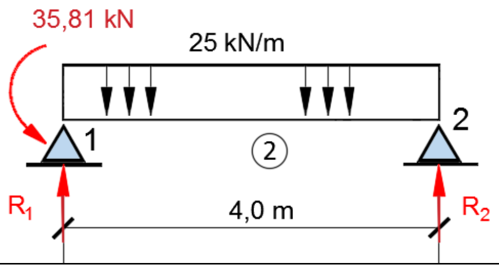
→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

Para vão 1:



$$\oplus \sum M_0 = 0$$
$$15 \times 3 \times 1{,}5 + 35{,}81 - R_1 \times 3 = 0$$
$$R_1 = 34{,}44 \text{ kN}$$
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$
$$R_0 + 34{,}44 - 15 \times 3 = 0$$
$$R_0 = 10{,}56 \text{ kN}$$

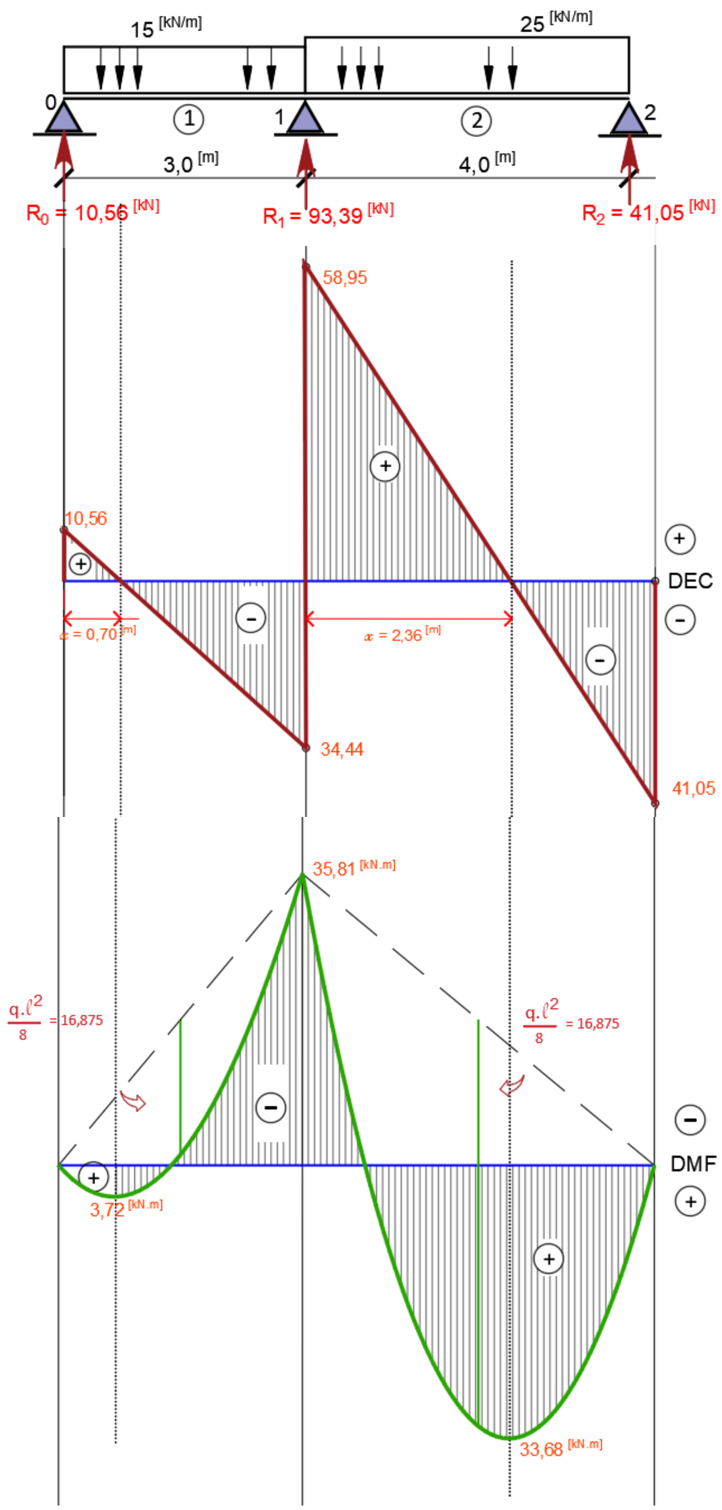
Para vão 2:



$$\oplus \sum M_1 = 0$$
$$25 \times 4 \times 2 - 35{,}81 - R_2 \times 4 = 0$$
$$R_2 = 41{,}05 \text{ kN}$$
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$
$$R_1 + 41{,}05 - 25 \times 4 = 0$$
$$R_1 = 58{,}95 \text{ kN}$$

$$R_0 = 10{,}56 \text{ kN}$$
$$R_1 = 34{,}44 + 58{,}95 = 93{,}93 \text{ kN}$$
$$R_2 = 41{,}05 \text{ kN}$$

DIAGRAMA DOS ESFORÇOS: Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).



→ DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO POSITIVO

ONDE O ESFORÇO CORTANTE É ZERO!!!

- Por semelhança de triângulo (1):

$$\mathbf{\frac{10,56}{x} = \frac{34,44}{3 - x}}$$

$$31,68 - 10,56.\,x = 34,44.\,x$$

$$x = 0,70\ m$$

$$\mathbf{M_{max^+} = 10,56 \times 0,7 - 15 \times 0,7 \times 0,35 = \ 3,72\ kN.m}$$

- Por semelhança de triângulo (2):

$$\mathbf{\frac{58,95}{x} = \frac{41,05}{4 - x}}$$

$$235,8 - 58,95.\,x = 41,05.\,x$$

$$x = 2,36\ m$$

$$M_{max^+} = 10,56 \times 5,36 - 15 \times 3 * 3,86 + 93,39 \times 2,36 - 25 \times 2,36 \times 1,18 = \ 33,68\ kN.m$$

1.3.4 Exercício 4: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 9.

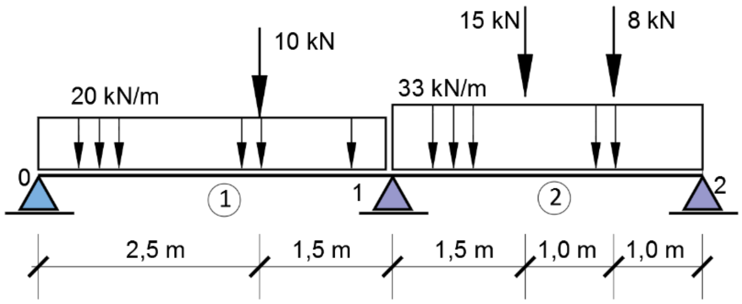


Figura 9. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \cdot X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) \cdot X_n + \ell_{n+1} \cdot X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \cdot X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) \cdot X_1 + \ell_2 \cdot X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

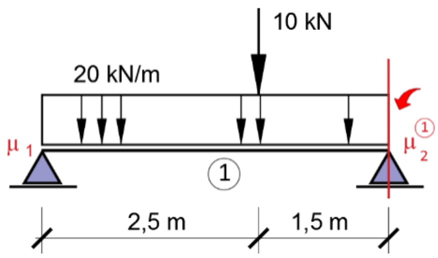
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

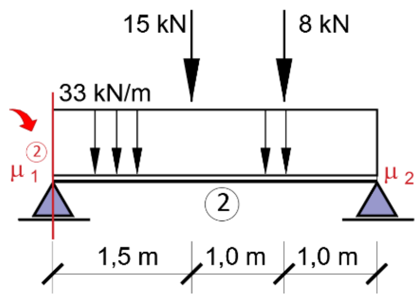
→ **CÁLCULO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.**

Fator de carga vão 1



$$\mu_2^1 = \frac{ql^3}{24} = \frac{20 \times 4^3}{24} = 53{,}33$$

Fator de carga vão 2

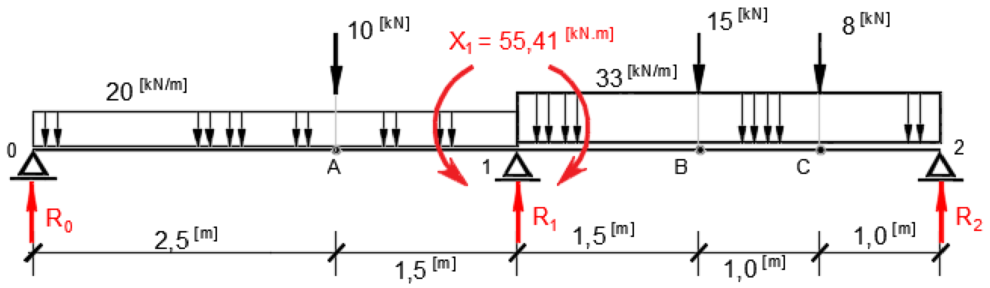


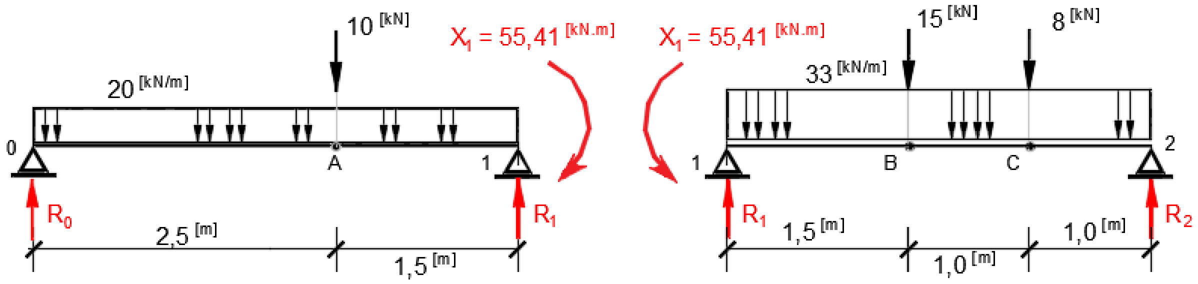
$$\mu_1^2 = \frac{ql^3}{24} = \frac{33 \times 3{,}5^3}{24} = 58{,}95$$

$\mu_2^1 = \dfrac{Pab}{6\ell}(a+\ell) = \dfrac{10\times 2{,}5\times 1{,}5}{6\times 4{,}0}(2{,}5+4{,}0) = 10{,}16$	$\mu_1^2 = \dfrac{Pab}{6\ell}(b+\ell) = \dfrac{15\times 1{,}5\times 2{,}0}{6\times 3{,}5}(2{,}0+3{,}5) = 11{,}79$ $\mu_1^2 = \dfrac{Pab}{6\ell}(b+\ell) = \dfrac{8\times 2{,}5\times 1{,}0}{6\times 3{,}5}(1{,}0+3{,}5) = 4{,}29$

→ CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

$$2(\ell_1 + \ell_2)\,.\,X_1 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$
$$2\times(4{,}0+3{,}5)\times X_1 = -6\times(53{,}33+10{,}16+58{,}95+11{,}79+4{,}29)$$
$$X_1 = -\,55{,}41\ \text{kN.m}$$

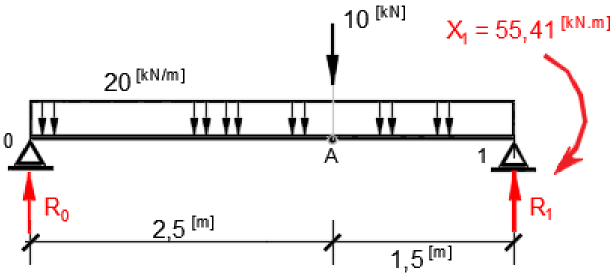




→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão. Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.

Para vão 1:



$$\oplus \sum M_0 = 0$$

$$20 \times 4 \times 2,0 + 10 \times 2,5 + 55,41 = R_1 \times 4$$

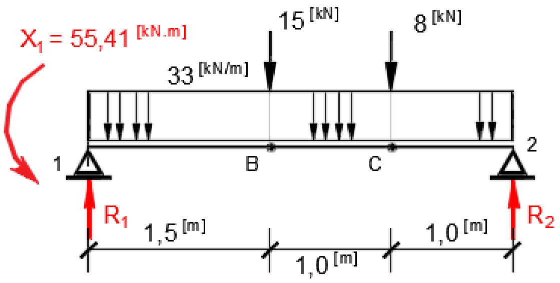
$$R_1 = 60,10\ kN$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_0 + 20 \times 4 + 10 - 60,10 = 0$$

$$R_0 = 29,90\ kN$$

Para vão 2:



$$\oplus \sum M_1 = 0$$

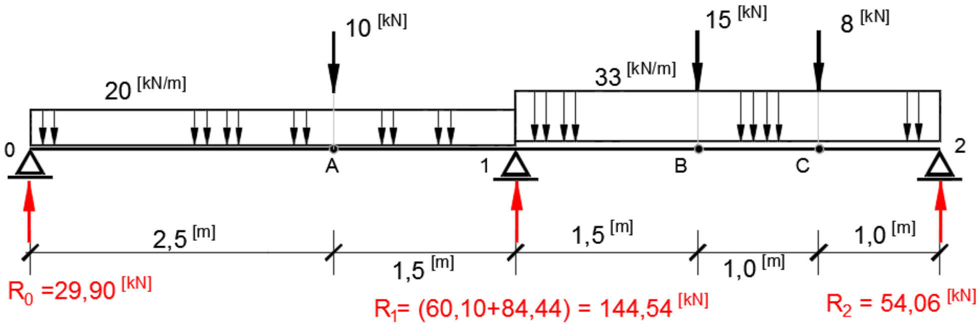
$$33 \times 3,5 \times 1,75 + 15 \times 1,5 + 8 \times 2,5 - 55,41 = R_2 \times 3,5$$

$$R_2 = 54,06\ kN$$

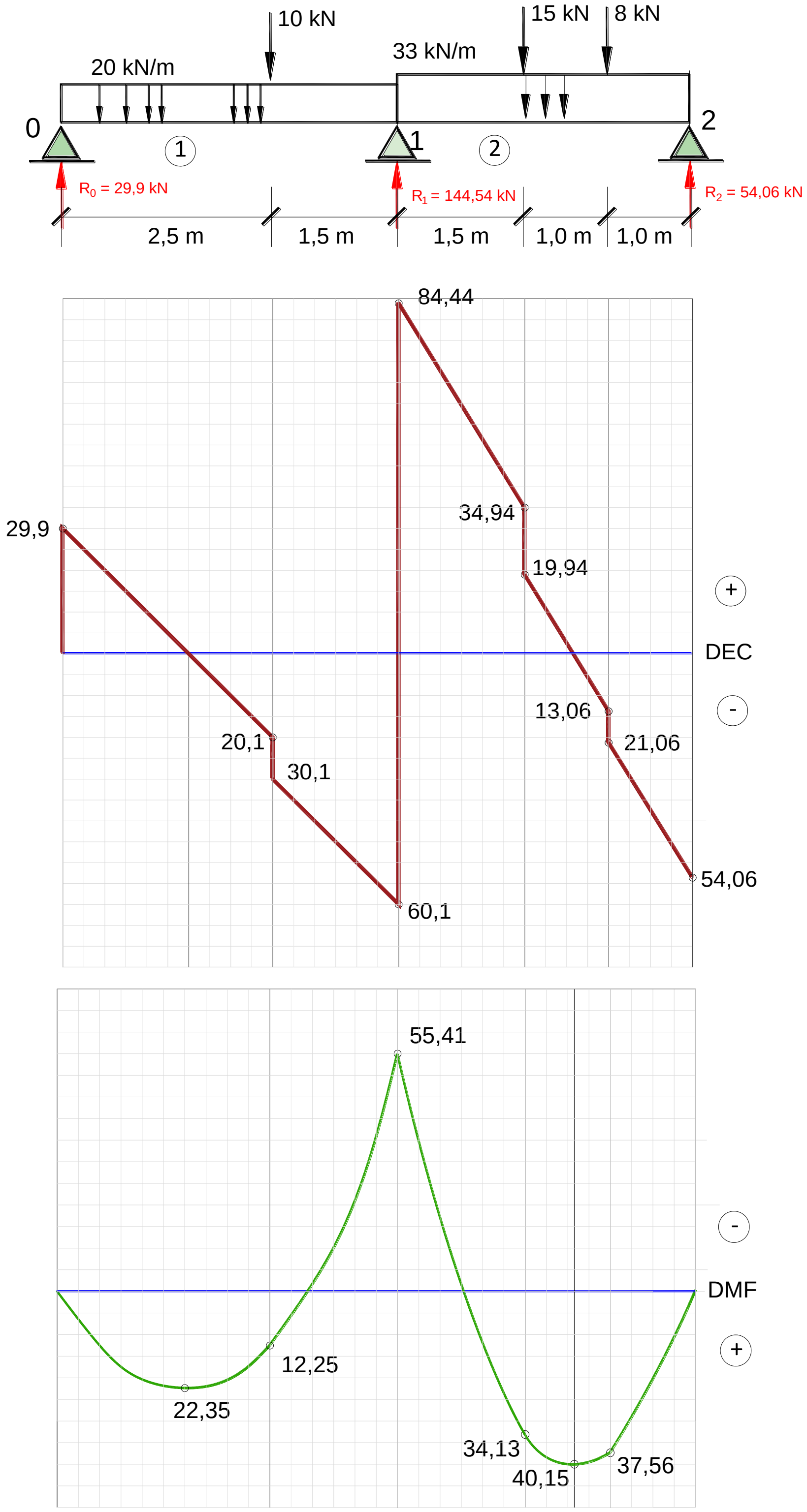
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_1 + 54,06 - 33 \times 3,5 - 15 - 8 = 0$$

$$R_1 = 84,44\ kN$$



→ **DIAGRAMA DOS ESFORÇOS:** Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).



1.3.5 **Exercício 5**: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 10.

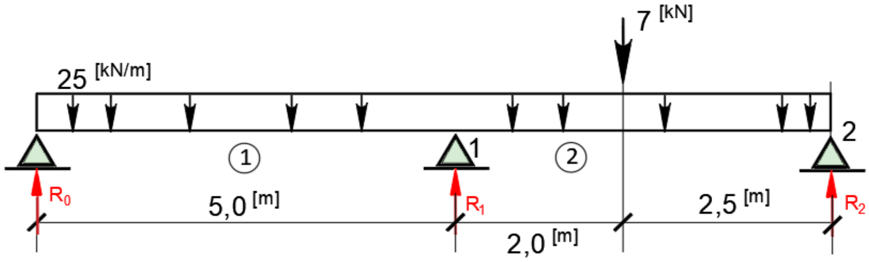


Figura 10. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) \,.\, X_n + \ell_{n+1} \,.\, X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \,.\, X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) \,.\, X_1 + \ell_2 \,.\, X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

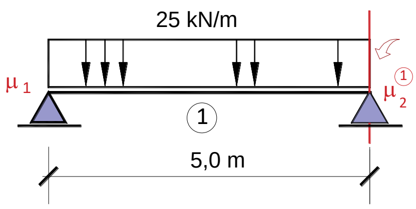
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

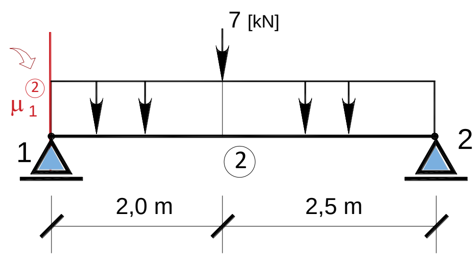
→ **DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1.**

Vão ❶



$$\mu_2^1 = \frac{ql^3}{24} = \frac{25 \times 5^3}{24} = 130{,}21$$

Vão ❷



$$\mu_1^2 = \frac{ql^3}{24} = \frac{25 \times 4{,}5^3}{24} = 94{,}92$$

$$\mu_1^2 = \frac{\text{Pab}}{6\text{l}} . (b + \text{l}) = \frac{7 \times 2{,}0 \times 2{,}5}{6 \times 4{,}5} . (2{,}5 + 4{,}5) = 9{,}07$$

→ CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

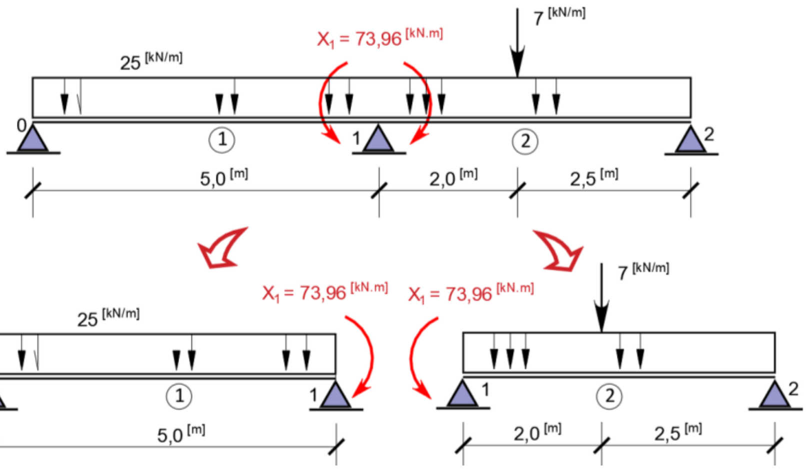
$$2(l_1 + l_2).X_1 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

$$2(5{,}0 + 4{,}5).X_1 = -6.(130{,}21 + 94{,}92 + 9{,}07)$$

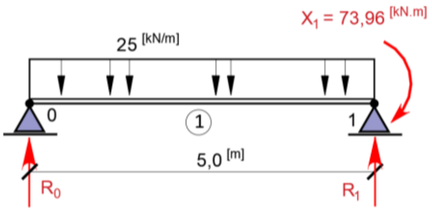
$$X_1 = 73{,}96\ kN.m$$

→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão. Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.



Para vão 1:



$$\oplus \sum M_0 = 0$$

$$25 \times 5{,}0 \times 2{,}5 + 73{,}96 - R_1 \times 5{,}0 = 0$$

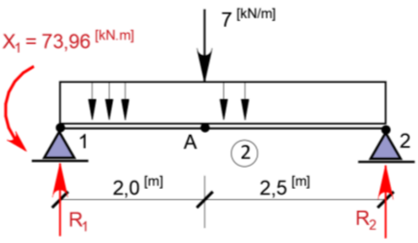
$$R_1 = 77{,}29\ \text{kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_0 - 25 \times 5 + 77{,}29 = 0$$

$$R_0 = 47{,}71\ \text{kN}$$

Para vão 2:



$$\oplus \sum M_1 = 0$$

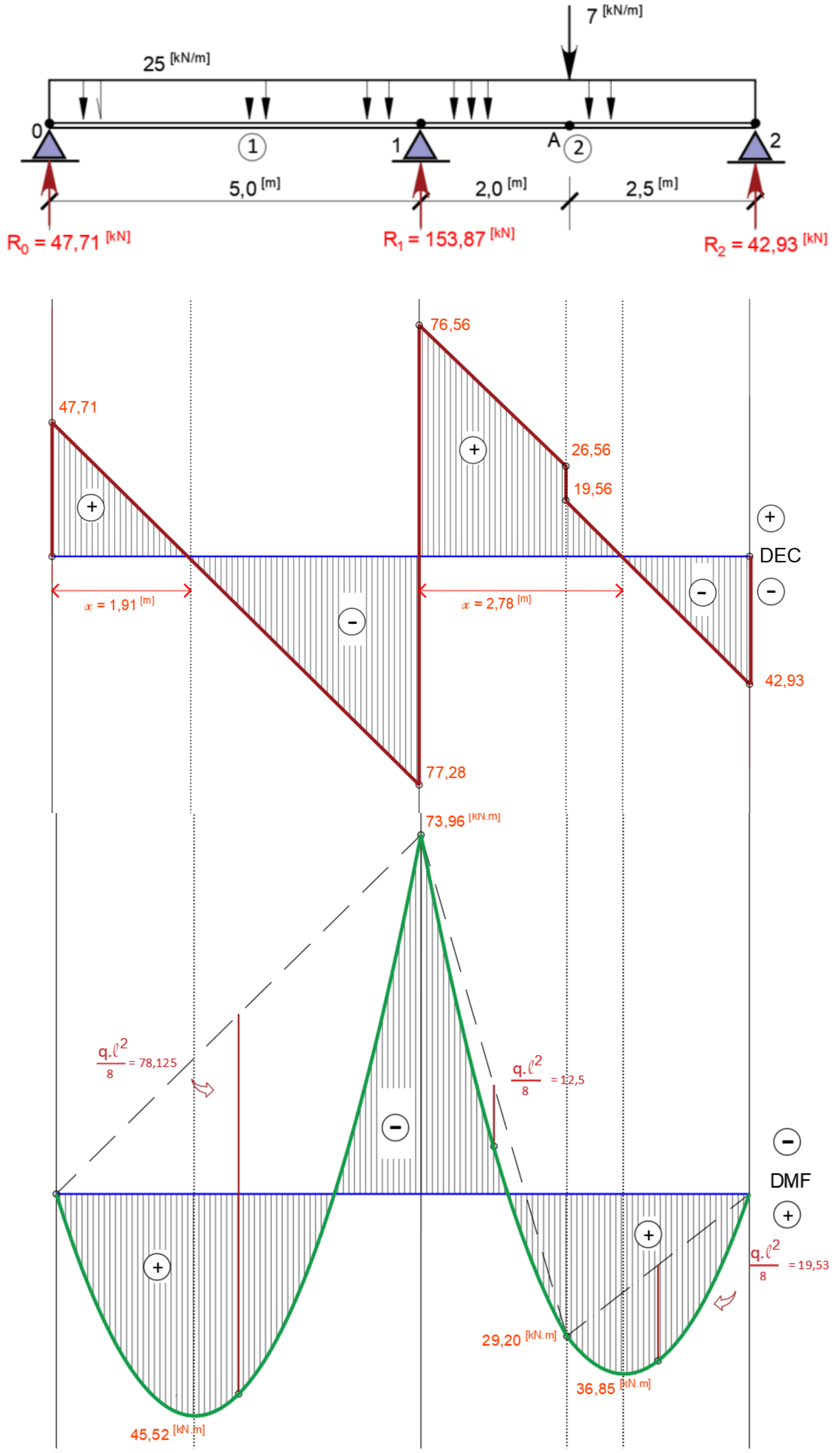
$$7 \text{ x } 2{,}0 + 25 \times 4{,}5 \times 2{,}25 - 73{,}96 - R_2 \times 4{,}5 = 0$$

$$R_2 = 42{,}93\ \text{kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_1 + 42{,}93 - 25 \times 4{,}5 - 7 = 0$$

$$R_1 = 76{,}57\ \text{kN}$$



7 [kN/m]
25 [kN/m]
0
1
2
A
5,0 [m]
2,0 [m]
2,5 [m]
R0 = 47,71 [kN]
R1 = 153,87 [kN]
R2 = 42,93 [kN]
76,56
47,71
26,56
19,56
DEC
42,93
x = 1,91 [m]
x = 2,78 [m]
77,28
73,96 [kN.m]
q.ℓ2/8 = 78,125
q.ℓ2/8 = 12,5
DMF
q.ℓ2/8 = 19,53
29,20 [kN.m]
36,85 [kN.m]
45,52 [kN.m]

→DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO POSITIVO

VÃO 1 (semelhança de triângulo)

$\frac{\mathbf{47,72}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{77,28}}{\mathbf{5-x}}$ $\quad 238,6 - 47,72.\mathrm{x} = 77,28.\mathrm{x} \quad \mathrm{x} = 1,91\ \mathrm{m}$

$\mathrm{M_{max^+}} = 47,71 * 1,91 - 25 * 1,91 * 0,96 = 45,52\ \mathrm{kN.m}$

VÃO 2 (semelhança de triângulo)

$\frac{19,56}{x} = \frac{42,93}{2,5-x}$ $\quad 19,56 \times 2,5 - 19,56.x = 42,93.x \quad x = 0,78\ m$

$\mathrm{M_{max^+}} = 47,71 \times 7,78 - 25 \times 5,0 \times 5,28 + 153,87 \times 2,78 - 25 \times 2,78 \times 1,39 - 7 \times 0,78 = 36,87\ \mathrm{kN.m}$

1.3.6 Exercício 6: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 11.

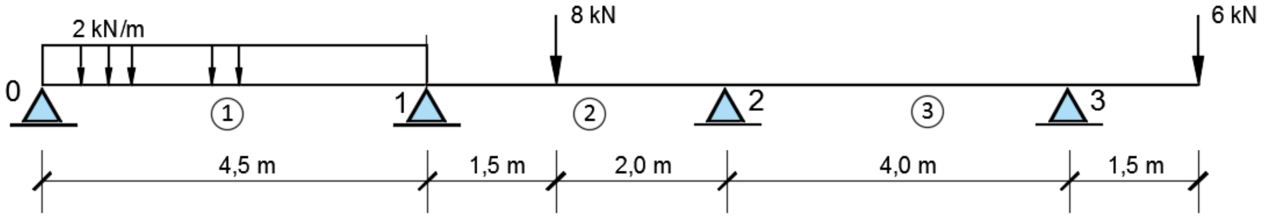


Figura 11. Viga hiperestática com três vãos e balanço na extremidade direita .

EQUAÇÃO:

$$\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) \,.\, X_n + \ell_{n+1} \,.\, X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$$

Três vãos → Duas aplicações. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.

*(vãos ❶; ❷ e ❸): **n = 1***

Etapa 1: Cálculo dos momentos nos apoios das extremidades:

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 3 → X_3 = - 6 x 1,5 = -9 kN.m

Etapa 2: Aplicação da equação dos 3 momentos: como a viga tem 3 vãos, serão necessárias 2 aplicações do método.

1º aplicação** (vãos ❶ e ❷): Para primeira aplicação **n = 1

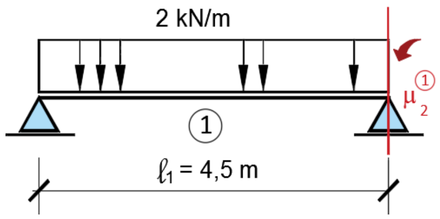
$$\ell_1 \,.\, X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) \,.\, X_1 + \ell_2 \,.\, X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

2º aplicação (vãos ❷ e ❸):** Para a segunda aplicação **n = 2

$$\ell_2 \,.\, X_1 + 2(\ell_2 + \ell_3) \,.\, X_2 + \ell_3 \,.\, X_3 = -6(\mu_2^2 + \mu_1^3)$$

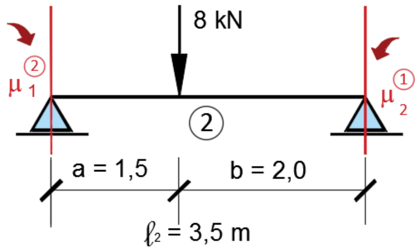
DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1.

Vão ❶ → PRIMEIRA APLICAÇÃO



$$\mu_2^1 = \frac{q\ell^3}{24} = \frac{2\times 4{,}5^3}{24} = 7{,}59$$

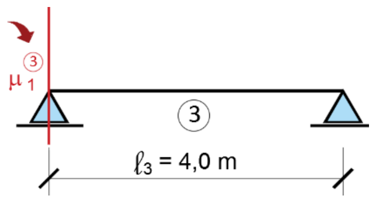
Vão ❷ → PRIMEIRA e SEGUNDA APLICAÇÃO



$$\mu_2^1 = \frac{Pab}{6\ell}(b+\ell) = \frac{8\times 1{,}5\times 2}{6\times 3{,}5}(2+3{,}5) = 6{,}29$$

$$\mu_2^2 = \frac{Pab}{6\ell}(a+\ell) = \frac{8\times 1{,}5\times 2}{6\times 3{,}5}(1{,}5+3{,}5) = 5{,}71$$

Vão ❸ → SEGUNDA APLICAÇÃO



Se não há carga no vão

$$\mu_3^1 = 0$$

Observação

Cálculo dos fatores de carga em um determinado vão:

- se não houver carga neste vão o fator de carga é igual a zero.
- se houver mais de uma carga neste vão o fator de carga final é igual à soma dos fatores de carga das cargas atuantes.

Agora pode-se resolver a 1ª aplicação: $2(\ell_1 + \ell_2) \,.\, X_1 + \ell_2 \,.\, X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$

$2.(4{,}5 + 3{,}5) \,.\, X_1 + 3{,}5 \,.\, X_2 = -6(7{,}59 + 6{,}29)$

$16 \,.\, X_1 + 3{,}5 \,.\, X_2 = -83{,}28)$

E na sequência pode-se resolver a 2ª aplicação: $\ell_2 . X_1 + 2(\ell_2 + \ell_3) \,.\, X_2 + \ell_3 \,.\, X_3 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$

$3{,}5.X_1 + 2(3{,}5 + 4{,}0) \,.\, X_2 + 4 \,.(-9) = -6(5{,}71 + 0)$

$3{,}5.X_1 + 15{,}0 \,.\, X_2 - 36{,}0 = -34{,}26$

$3{,}5.X_1 + 15 \,.\, X_2 = -1{,}74$

Resolvendo-se o sistema de duas equações a duas incógnitas, decorrente da 1° e 2° aplicações da Equação dos 3 Momentos, obtém-se aos valores dos momentos X_1 e X_2. Os valores dos momentos nos apoios X_0 e X_3 são obtidos diretamente na análise do cálculo do momento fletor da viga nesses apoios.

Então:

$X_0 = 0$

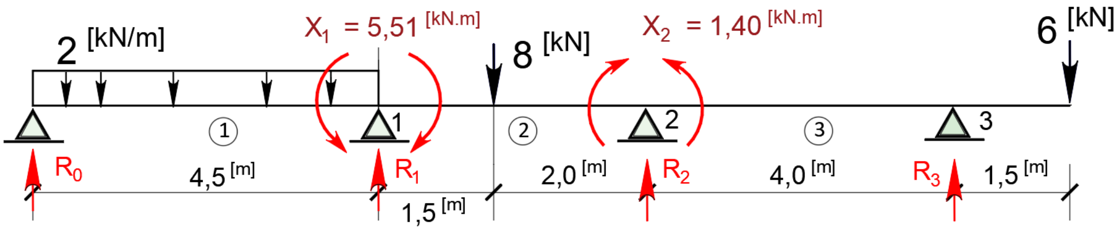
$X_1 = -5{,}51$ kN.m

$X_2 = 1{,}40$ kN.m

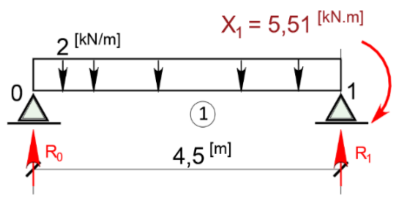
$X_3 = -9{,}00$ kN.m

→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

A partir desse ponto, pode-se fazer o cálculo das reações de apoio para cada vão individualmente (com a representação dos respectivos momentos fletores nos apoios), e posterior, após reações, determinação dos esforços seccionais nas seções-chaves, necessários para possibilitar o traçado dos diagramas desses esforços.



Vão ❶



$$\oplus \sum M_0 = 0$$

$$2 \times 4{,}5 \times 2{,}25 + 5{,}51 - R_1 \times 4{,}5 = 0$$

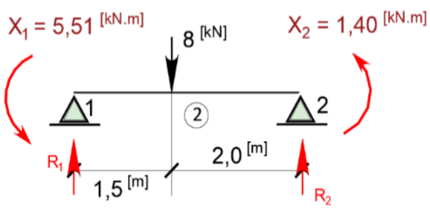
$$R_1 = 5{,}72 \text{ kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_0 - 2 \times 4{,}5 + 5{,}72 = 0$$

$$R_0 = 3{,}28 \text{ kN}$$

Vão ❷



$$\oplus \sum M_1 = 0$$

$$8 \times 1{,}5 - 5{,}51 + 1{,}40 - R_2 \times 3{,}5 = 0$$

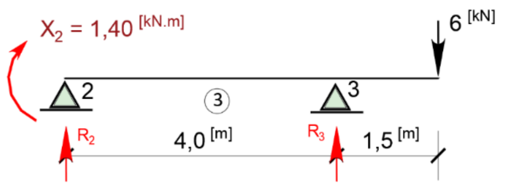
$$R_2 = 1{,}45 \text{ kN}$$

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$$R_1 - 8 + 1{,}45 = 0$$

$$R_1 = 6{,}55 \text{ kN}$$

Vão ❸



$$\curvearrowleft \oplus \sum M_2 = 0$$

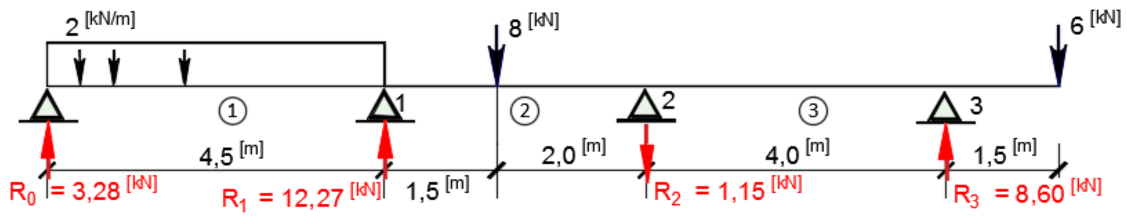
$$6 \times 5{,}5 - 4{,}0 \times R_3 + 1.40 = 0$$
$$R_3 = 8{,}60 \text{ kN}$$

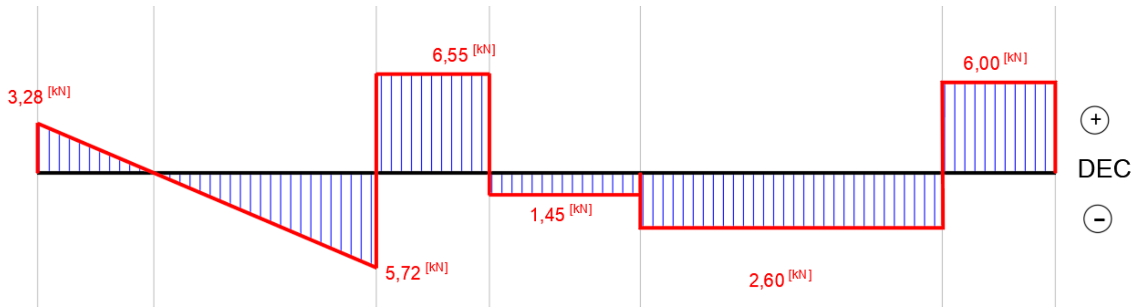
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

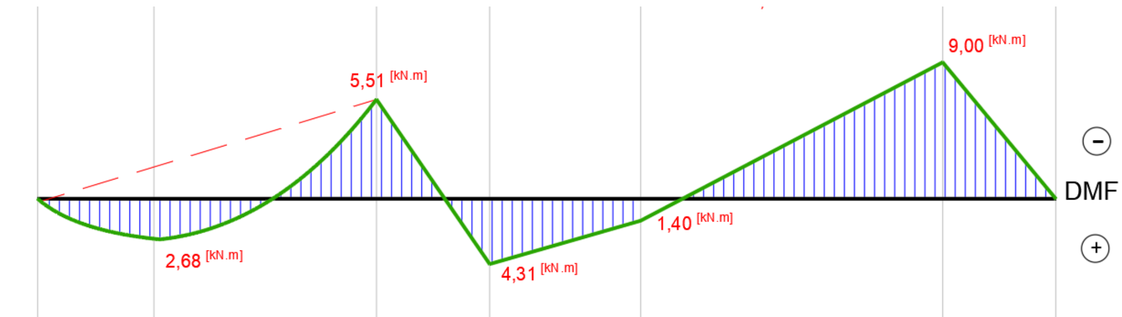
$$R_2 + 8{,}60 - 6 = 0$$

$$R_2 = -2{,}60 \text{ kN}$$

DIAGRAMA DOS ESFORÇOS: Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).







1.3.7 **Exercício 7:** Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 12.

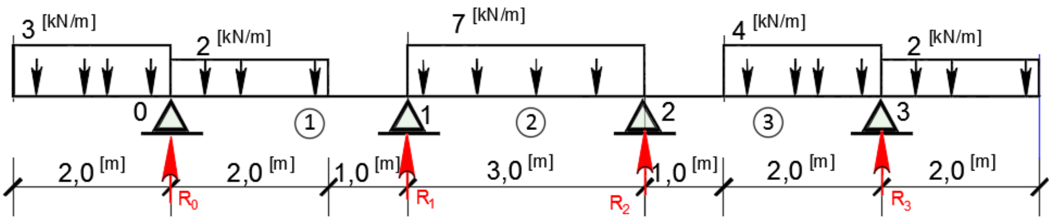


Figura 12. Viga hiperestática com três vãos e balanços nas extremidades.

Etapa 1: Cálculo dos momentos nos apoios das extremidades:

Apoio 0 → X_0 = -(3x2) = - 6 kN.m

Apoio 3 → X_3 = - (2x2) = - 4 kN.m

Etapa 2: Aplicação da equação dos 3 momentos: como a viga tem 3 vãos, serão necessárias 2 aplicações do método.

Equação Geral: $\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1})\,.\,X_n + \ell_{n+1}\,.\,X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$

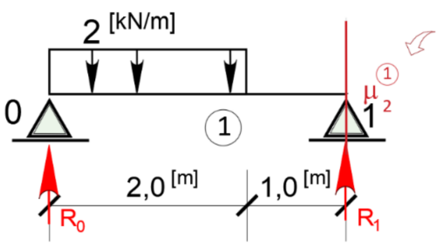
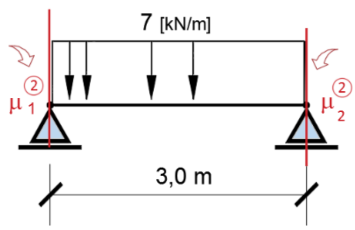
1º aplicação *(vãos ❶ e ❷): Para primeira aplicação **n = 1***

$$\ell_1 \,.\, X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2)\,.\,X_1 + \ell_2\,.\,X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

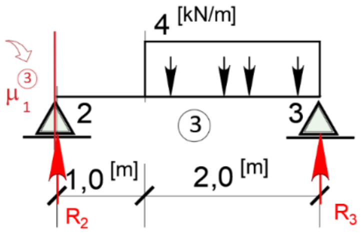
2º aplicação (vãos ❷e ❸): *Para a segunda aplicação **n = 2***

$$\ell_2 \,.\, X_1 + 2(\ell_2 + \ell_3)\,.\,X_2 + \ell_3\,.\,X_3 = -6(\mu_2^2 + \mu_1^3)$$

FATORES DE CARGA

Vão ❶ → PRIMEIRA APLICAÇÃO	vão ❷ → PRIMEIRA e SEGUNDA APLICAÇÃO
	
$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$ $\mu_2^1 = \frac{2 \times 2^2 \times (2 \times 3^2 - 2^2)]}{24 \times 3} = 1{,}56$	$\mu_1^2 = \frac{q.l^3}{24} = \frac{7 \times 3^3}{24} = 7{,}875$ (1ª aplicação) $\mu_2^2 = \frac{q.l^3}{24} = \frac{7 \times 3^3}{24} = 7{,}875$ (2ª aplicação)

vão ❸ → SEGUNDA APLICAÇÃO



$$\frac{q.s^2}{24\ell}(\ell+a)^2$$

$$\frac{4.2^2}{24.3}(3+1)^2 = 3{,}56$$

Observação:

Cálculo dos fatores de carga em um determinado vão:

- se não houver carga neste vão o fator de carga é igual a zero.
- se houver mais de uma carga neste vão o fator de carga final é igual a soma dos fatores de carga das cargas atuantes.

Agora pode-se resolver a 1ª aplicação: $\ell_1 . X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) . X_1 + \ell_2 . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$

$$3.(-6) + 2(3+3) . X_1 + 3 . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

$$-18 + 12 . X_1 + 3 . X_2 = -6(1{,}56 + 7{,}875)$$

$$-18 + 12 . X_1 + 3 . X_2 = -56{,}61$$

$$12 . X_1 + 3 . X_2 = -38{,}61$$

E na sequência, pode-se resolver a 2ª aplicação: $\ell_2 . X_1 + 2(\ell_2 + \ell_3) . X_2 + \ell_3 . X_3 = -6(\mu_2^2 + \mu_1^3)$

$3.X_1 + 2(3+3) . X_2 + 3 .(-4) = -6(7{,}875 + 3{,}56)$

$3 . X_1 + 12 . X_2 - 12 = -68{,}61$

$3 . X_1 + 12 . X_2 = -56{,}61$

Resolvendo-se o sistema de duas equações a duas incógnitas, decorrente da 1° e 2° aplicações da Equação dos 3 Momentos, chega-se aos valores dos momentos X_1 e X_2. Os valores dos momentos nos apoios X_0 e X_3 são obtidos diretamente na análise do cálculo do momento fletor da viga nesses apoios.

X_0 = - 6 kN,m

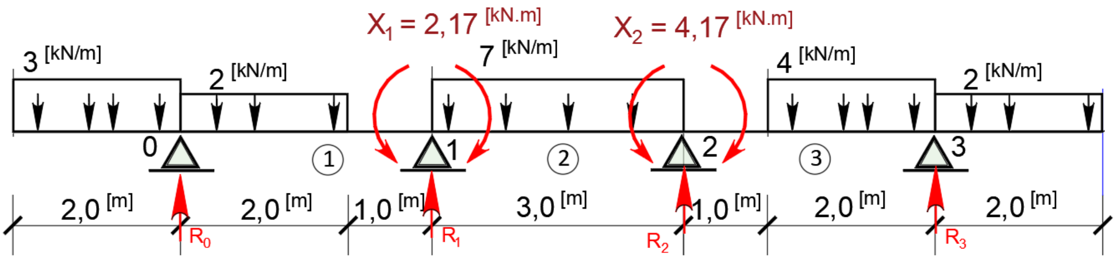
Então: X_1 = - 2,17 kN.m

X_2 = - 4,17 kN.m

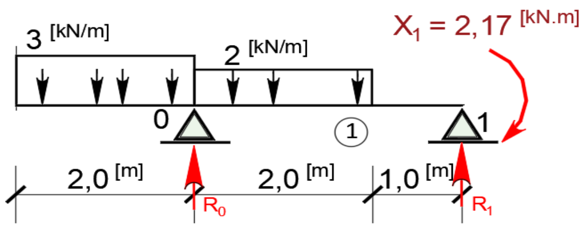
X_3 = - 4 kN.m

CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

A partir daí pode ser feito o cálculo das reações de apoio e dos valores dos momentos fletores nos pontos necessários para possibilitar o desenho dos diagramas.



(a)



(b)

$$\oplus \sum M_0 = 0$$

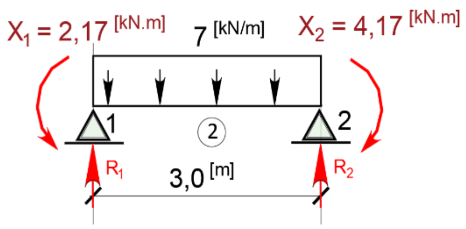
-3x2x1 + 2x2x1 + 2,17 = $3R_1$

R_1 = 0,06 [kN]

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

R_0 = 6 + 4 – 0,06

R_0 = 9,94 [kN]



(c)

$$\oplus \sum M_1 = 0$$

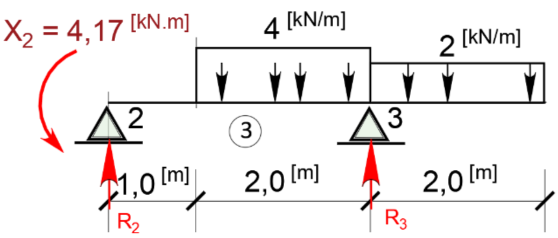
7x3x1,5 – 2,17 + 4,17 = $3R_2$

R_2 = 11,17 [kN]

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

R_1 = 21 – 11,17

R_1 = 9,83 [kN]



(d)

$$\oplus \sum M_1 = 0$$

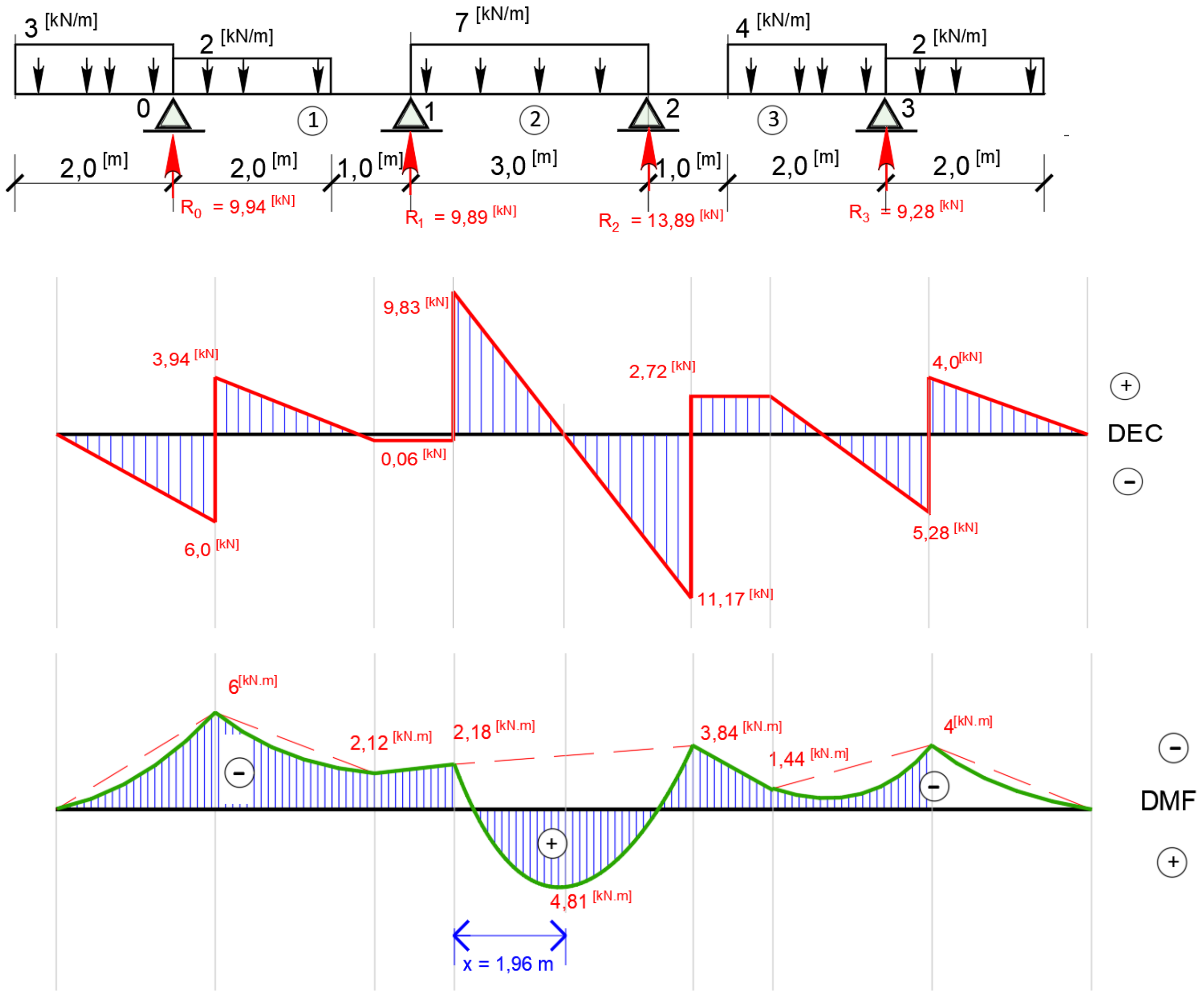
4x2x2,0 – 4,17 + 2x2x4,0 = $3R_3$

$R_3 = 9{,}28$ [kN]

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$R_2 = 8 + 4 - 9{,}28$

$R_2 = 2{,}72$ [kN]



1.3.8 Exercício 8: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 13.

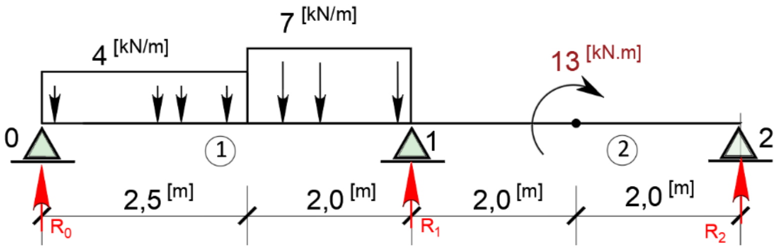


Figura 13. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \cdot X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) \cdot X_n + \ell_{n+1} \cdot X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \cdot X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) \cdot X_1 + \ell_2 \cdot X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

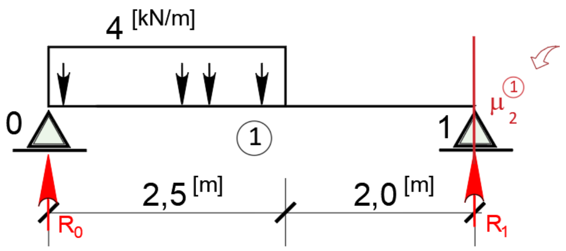
Observação:

Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

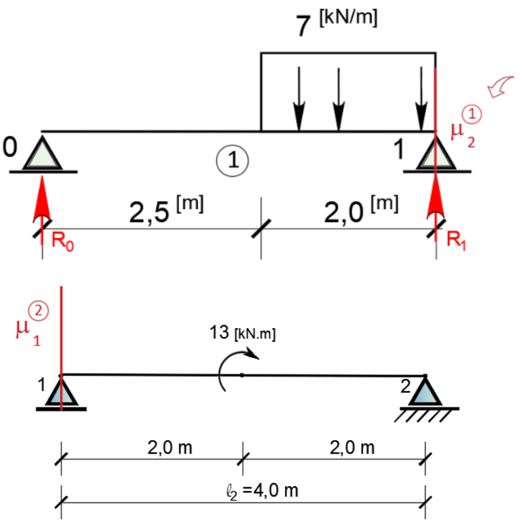
Apoio 2 → $X_2 = 0$

DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.



$$\frac{q.s^2}{24\ell}(2\ell^2 - s^2)$$

$$\frac{4.2{,}5^2}{24 \times 4{,}5}(2 \times 4{,}5^2 - 2{,}5^2) = 7{,}93$$



$$\frac{q.s^2}{24\ell}(\ell+a)^2$$

$$\frac{7\times 2^2}{24\times 4{,}5}(4{,}5+2{,}5)^2 = 12{,}70$$

$$M\frac{\ell}{6}\left(\frac{3b^2}{\ell^2}-1\right)$$

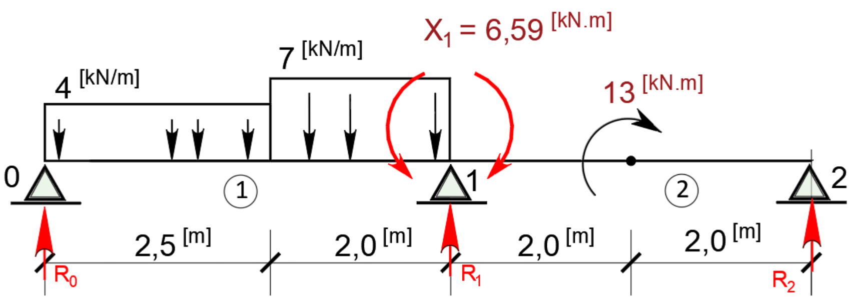
$$13\times\frac{4{,}0}{6}\left(\frac{3\times 2^2}{4^2}-1\right) = -2{,}17$$

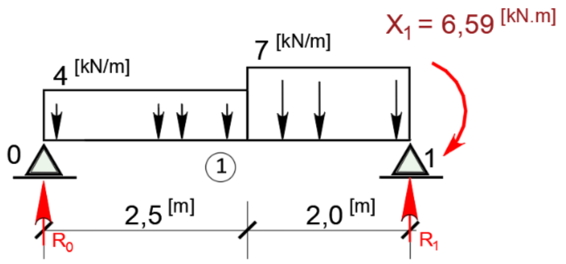
→ CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

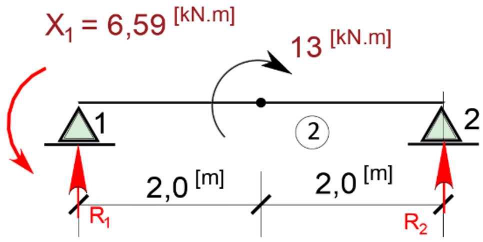
$$2(\ell_1+\ell_2).X_1 = -6(\mu_2^1+\mu_1^2)$$
$$2\times(4{,}5+4{,}0)\times X_1 = -6\times(7{,}93+12{,}9+2{,}17)$$
$$X_1 = -6{,}59 \text{ kN.m}$$

→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão. Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.







$$\oplus \sum M_0 = 0$$

$4x2{,}5x1{,}25 + 7x2x3{,}5 + 6{,}59 = 4{,}5R_1$

$R_1 = 15{,}13$ [kN]

$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$R_0 = 4x2{,}5 + 7x2{,}0 - 15{,}13$

$R_0 = 8{,}87$ [kN]

$$\oplus \sum M_1 = 0$$

$-6{,}59 + 13 = 4R_1$

$R_1 = 1{,}60$ [kN]

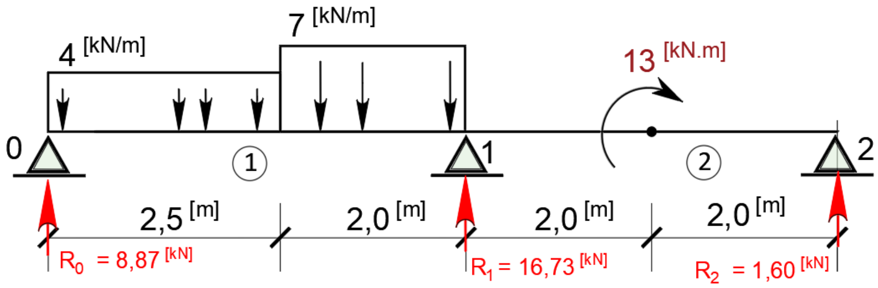
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$

$R_2 = R_1 = 1{,}60$ [kN]

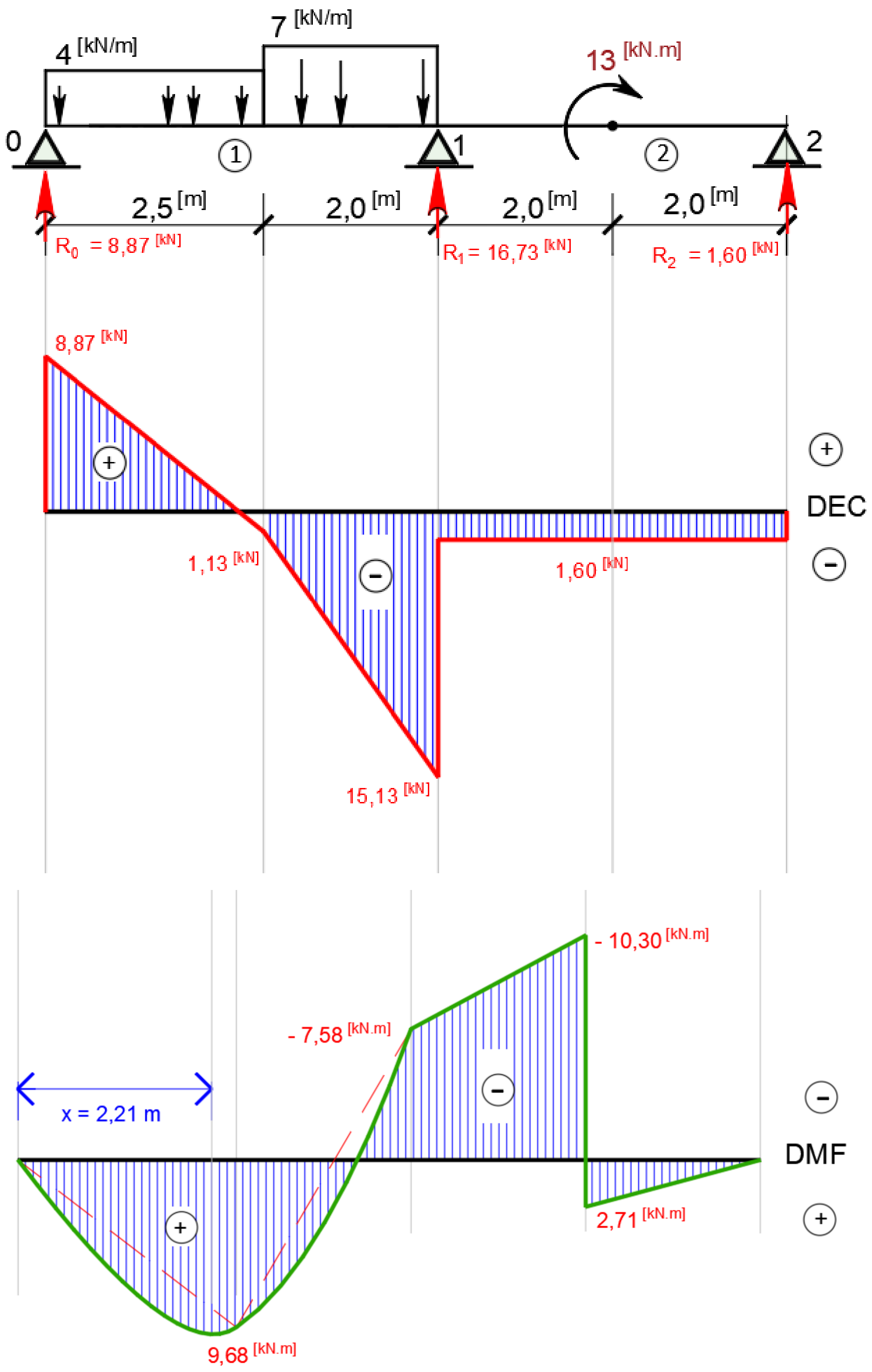
$$\boldsymbol{R_0 = 8,87\ kN}$$

$$\boldsymbol{R_1 = 15,13 + 1,60 = 16,73\ kN}$$

$$\boldsymbol{R_2 = 1,60\ kN}$$



→ **DIAGRAMA DOS ESFORÇOS:** Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).



1.3.9 Exercício 9: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 14.

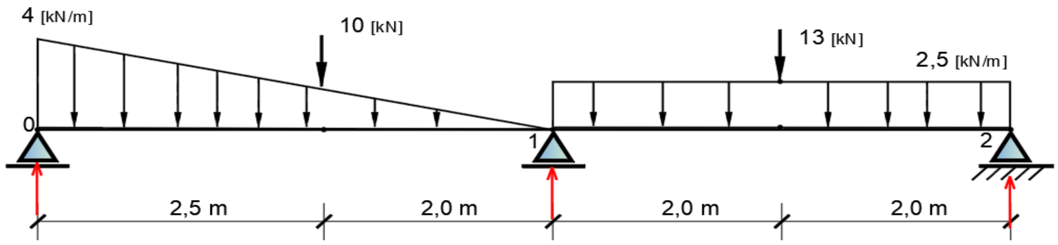


Figura 14. Viga hiperestática com dois vãos e carga triangular no primeiro vão.

EQUAÇÃO:

$$\ell_n \cdot X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) \cdot X_n + \ell_{n+1} \cdot X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$$

Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.

*(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 \cdot X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) \cdot X_1 + \ell_2 \cdot X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

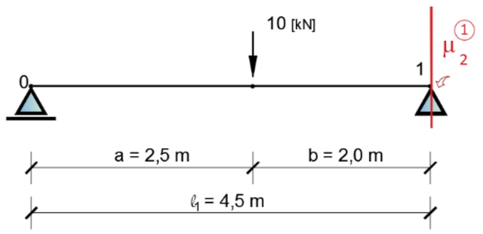
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

FATORES DE CARGA

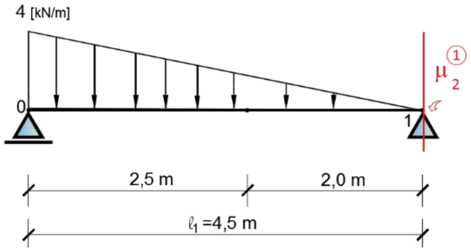
Vão ❶ - carga concentrada



$$\mu_2^{1'} = \frac{P \times a \times b}{6 \times l} \times (a + l)$$

$$\mu_2^{1'} = \frac{10 \times 2,5 \times 2,0}{6 \times 4,5} \times (2,5 + 4,5) = 12,96$$

Vão ❶ - carga distribuída triangular

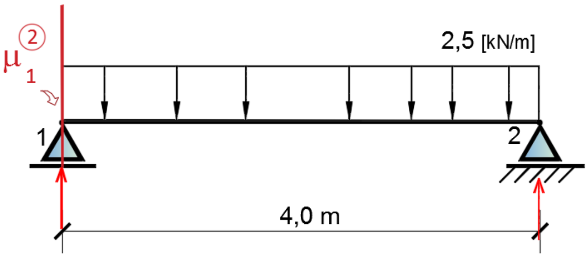


$$\mu_2^{1''} = \frac{7 \times q \times l^3}{360}$$

$$\mu_2^{1''} = \frac{7 \times 4 \times 4{,}5^3}{360} = 7{,}09$$

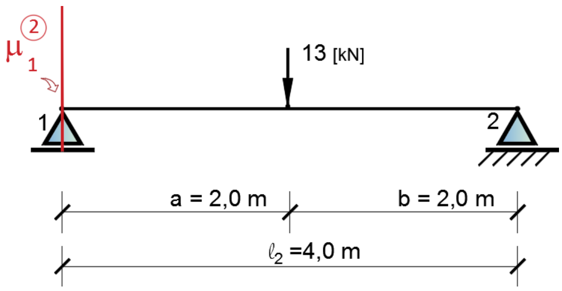
$$\mu_2^1 = \mu_2^{1'} + \mu_2^{1''} = 12{,}96 + 7{,}09 = 20{,}05$$

Vão ❷ - carga distribuída



$$\mu_1^{2'} = \frac{q \times l^3}{24} = \frac{2{,}5 \times 4{,}0^3}{24} = 6{,}67$$

Vão ❷ - carga concentrada



$$\mu_1^{2''} = \frac{P \times a \times b \times (b + l)}{6 \times l}$$

$$\mu_1^{2''} = \frac{13 \times 2{,}0 \times 2{,}0 \times (2{,}0 + 4{,}0)}{6 \times 4{,}0} = 13$$

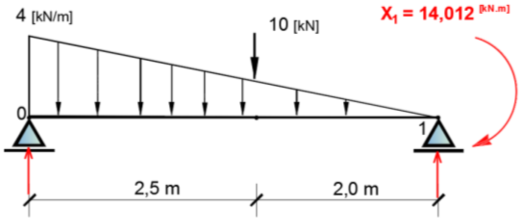
$$\mu_1^2 = \mu_1^{2'} + \mu_1^{2''} = 6{,}67 + 13{,}0 = 19{,}67$$

$$2 \times (4{,}5 + 4).X_1 = -6.(20{,}05 + 19{,}67)$$

$$X_1 = 14{,}012\ kN.m$$

→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

As reações de apoio devem ser calculadas separadamente para cada vão. Além das cargas nos vãos (distribuídas e/ou concentradas), devem-se aplicar também os momentos nos apoios do respectivo vão. O sentido destes momentos (horário ou anti-horário) deve deformar o vão da mesma maneira que a carga aplicada sobre ele.



$$\sum M_0 = 0$$

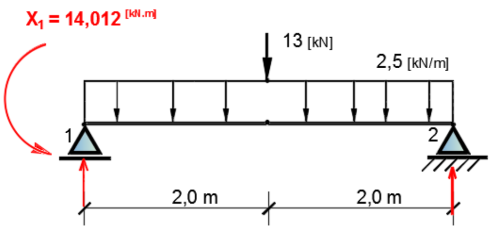
$$+\left(\frac{4{,}5 \times 4}{2}\right) \times 1{,}5 + (10 \times 2{,}5) + 14{,}012 = 4{,}5 \times R_1$$

$$\boldsymbol{R_{1'} = 11{,}67\ kN}$$

$$\sum V = 0$$

$$R_0 + R_{1'} = 9 + 10$$

$$\boldsymbol{R_0 = 7{,}33\ kN}$$



$$\sum M_1 = 0$$

$$-(14{,}012) + 13 \times 2\ + 2{,}5 \times 4 \times 2 = 4 \times R_2$$

$$\boldsymbol{R_2 = 8{,}00\ kN}$$

$$\sum V = 0$$

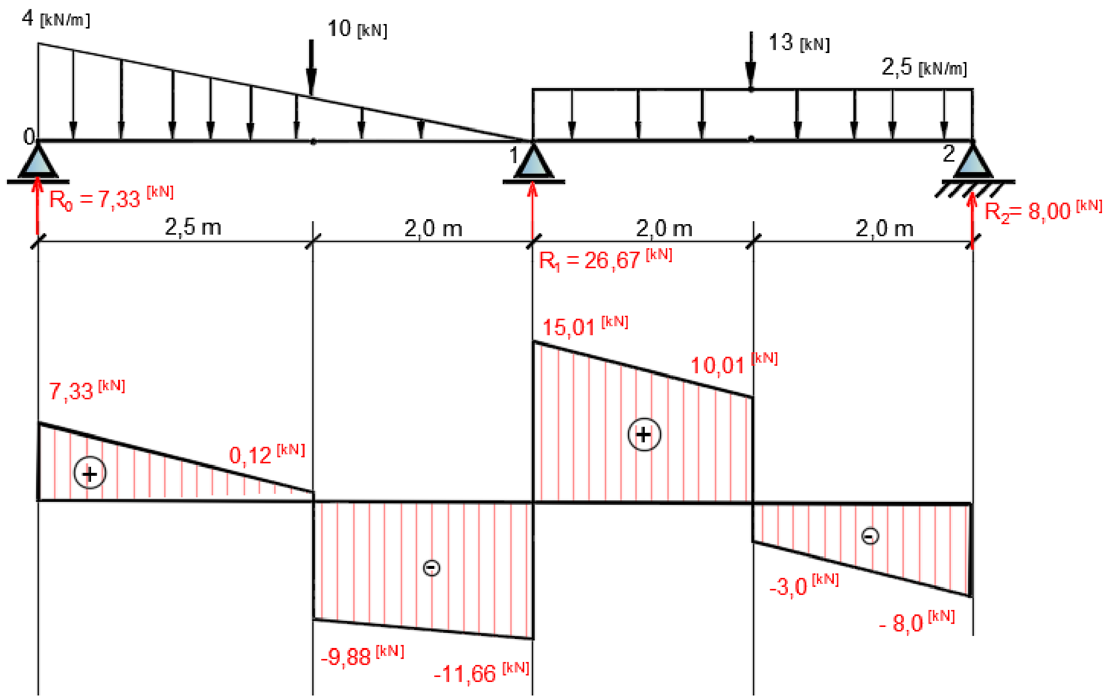
$$\rightarrow R_{1''} + R_2 = \ 13 + 2{,}5\ \times 4$$

$$R_{1''} = \ 13 + 10 - 8{,}0 = 15{,}0\ [\mathrm{kN}]$$

$$\boldsymbol{R_0 = 7{,}33 kN}$$

$$\boldsymbol{R_1 = \ 15{,}0 \mp 11{,}67 = 26{,}67\ kN}$$

$$\boldsymbol{R_2 = \ 8{,}0\ kN}$$



4 [kN/m]
10 [kN]
13 [kN]
2,5 [kN/m]
0
1
2
R0 = 7,33 [kN]
R1 = 26,67 [kN]
R2= 8,00 [kN]
2,5 m
2,0 m
2,0 m
2,0 m
15,01 [kN]
10,01 [kN]
7,33 [kN]
0,12 [kN]
-9,88 [kN]
-11,66 [kN]
-3,0 [kN]
- 8,0 [kN]

1.3.10 Exercício 10: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 15.

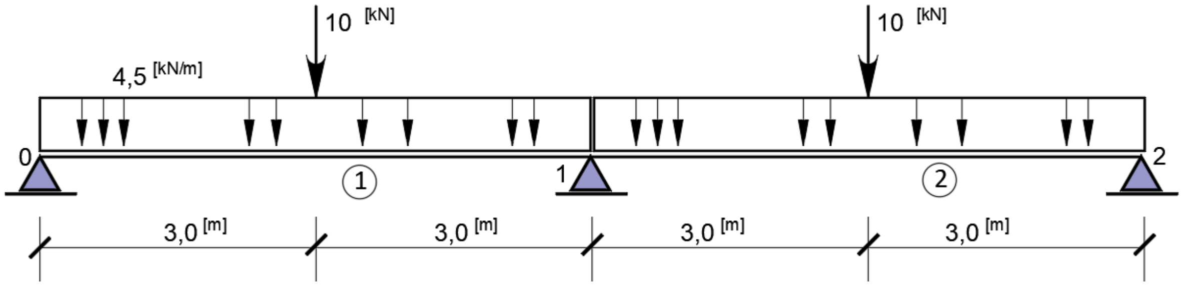


Figura 15. Viga hiperestática com dois vãos.

Equação 1:	$\ell_n \,.\, X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1})\,.\,X_n + \ell_{n+1}\,.\,X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1\,.\,X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2)\,.\,X_1 + \ell_2\,.\,X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

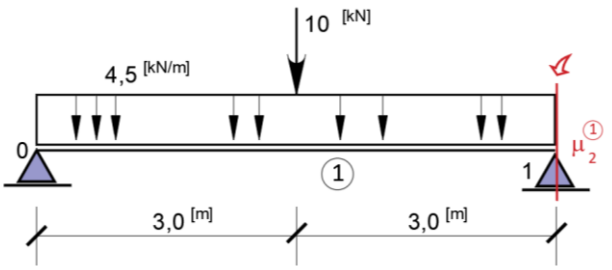
Nos apoios de extremidade o valor do momento será igual a 0 (zero) - **se não houver balanço**

Apoio 0 → $X_0 = 0$

Apoio 2 → $X_2 = 0$

DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.

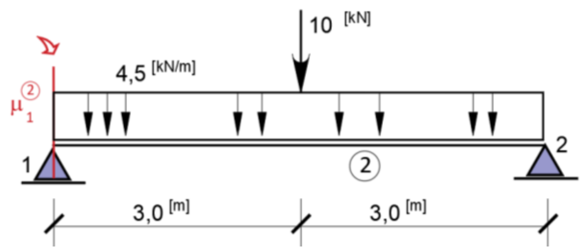
Fator de carga vão 1



$$\mu_2^1 = \frac{ql^3}{24} = \frac{4{,}5 \times 6{,}0^3}{24} = 40{,}5$$

$$\mu_2^1 = \frac{P \times a \times b}{6 \times l}\,.\,(a + l) = \frac{10 \times 3 \times 3}{6 \times 6}(3 + 6) = 22{,}5$$

Fator de carga vão 2

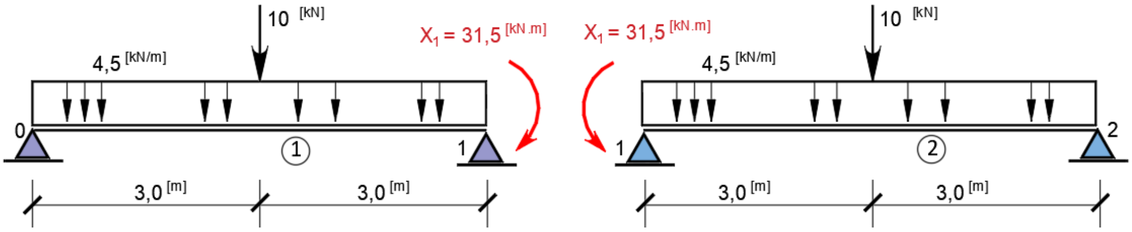


$$\mu_2^2 = \frac{q \times l^3}{24} = \frac{4{,}5 \times 6{,}0^3}{24} = 40{,}5$$

$$\mu_2^1 = \frac{P \times a \times b}{6 \times l}\,.\,(b + l) = \frac{10 \times 3 \times 3}{6 \times 6}(3 + 6) = 22{,}5$$

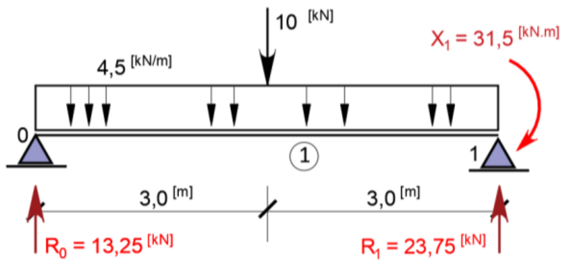
CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

$$2(l_1 + l_2)\,.\,X_1 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$
$$2 \times (6{,}0 + 6{,}0) \times X_1 = -6 \times (40{,}5 + 22{,}5 + 40{,}5 + 22{,}5)$$
$$X_1 = -\,31{,}5 \text{ kN.m}$$



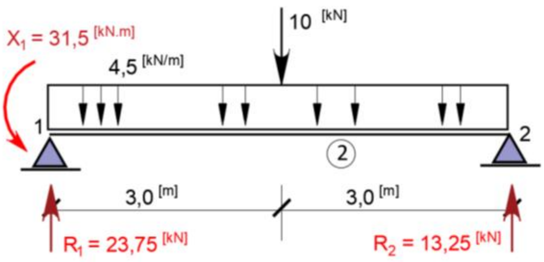
→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

Para vão 1:



$$\oplus \sum M_0 = 0$$
$$4{,}5 \times 6 \times 3 + 31{,}5 + 10 \times 3 - R_1 \times 6 = 0$$
$$R_1 = 23{,}75 \text{ kN}$$
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$
$$R_0 + 23{,}75 - 4{,}5 \times 6 - 10 = 0$$
$$R_0 = 13{,}25 \text{ kN}$$

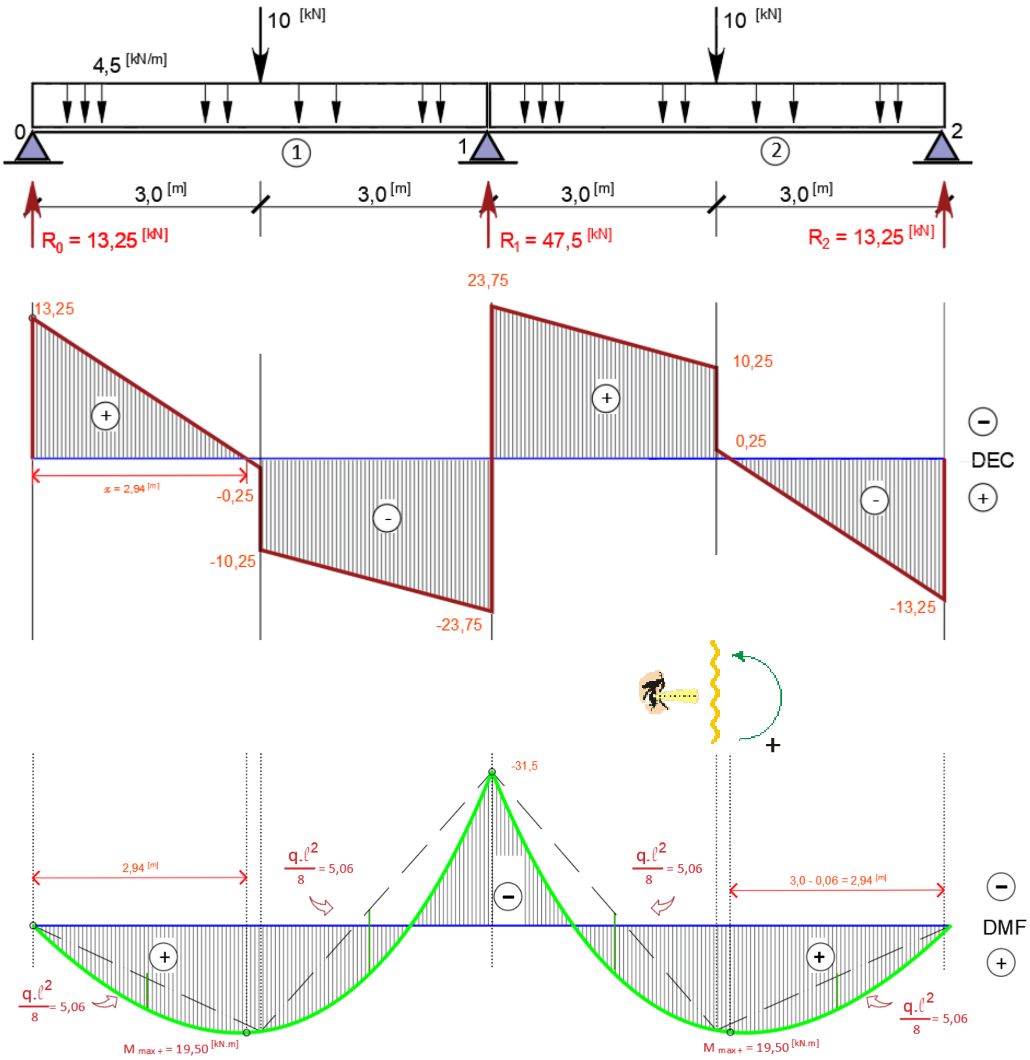
Para vão 2:



$$\oplus \sum M_1 = 0$$
$$-31{,}5 + 4{,}5 \times 6 \times 3 + 10 \times 3 - R_2 \times 6 = 0$$
$$R_2 = 13{,}25 \text{ kN}$$
$$\uparrow \oplus \sum V = 0$$
$$R_1 + 13{,}25 - 10 - 4{,}5 \times 6 = 0$$
$$R_1 = 23{,}5 \text{ kN}$$

$$R_0 = 13{,}25 \text{ kN}$$
$$R_1 = 23{,}75 + 23{,}75 = 47{,}5 \text{ kN}$$
$$R_2 = 13{,}25 \text{ kN}$$

DIAGRAMA DOS ESFORÇOS: Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).



→DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO POSITIVO

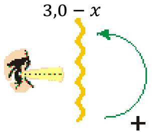
VÃO 1 (semelhança de triângulo)

$$\frac{\mathbf{13,25}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{0,25}}{\mathbf{3-x}} \qquad \mathbf{39,75} - 13,25.x = 0,25.x \qquad \rightarrow\ x = 2,94\ \mathrm{m}$$

$$M_{max^+} = 13,25 * 2,94 - 4,5 * 2,94 * 1,47 = 19,5\ \mathrm{kN.m}$$

VÃO 2 (semelhança de triângulo)

$$\frac{0,25}{x} = \frac{13,25}{3,0-x} \qquad 0,75 - 0,25.x = 13,25.x \qquad x = 0,06\ m$$



$$M_{max^+} = 13,25 \times (2,94) - 4,5 \times (2,94) \times (\frac{2,94}{2}) = 19,5\ \mathrm{kN.m}$$

1.3.11 Exercício 03: Calcular e desenhar diagrama dos esforços seccionais de viga contínua ilustrada na Figura 16.

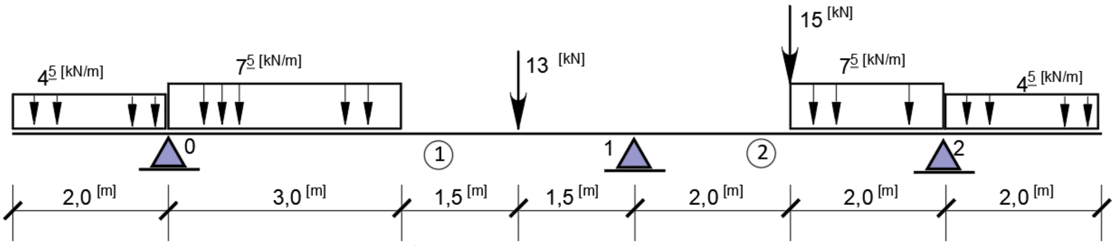


Figura 16. Viga hiperestática de dois vãos com dois balanços nas extremidade.

Equação 1:	$\ell_n . X_{n-1} + 2(\ell_n + \ell_{n+1}) . X_n + \ell_{n+1} . X_{n+1} = -6(\mu_2^n + \mu_1^{n+1})$
Análise:	**Dois vão → Uma aplicação. Para nomear vãos e apoios, sempre iniciar com n=1.** *(vãos ❶ e ❷): **n = 1***

Vãos	Apoios
n = 1 n +1 = 2	n -1 = 0 n = 1 n +1 = 2

$$\ell_1 . X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) . X_1 + \ell_2 . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

Observação:

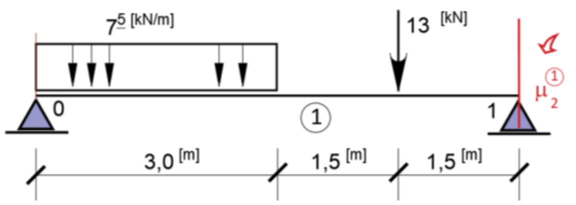
Nos apoios de extremidade o valor do momento será DIFERENTE de 0 (zero) – **por haver balanço NAS EXTREMIDADES DA VIGA**

Apoio 0 → X_0 = -4,5*2*1 = -9 kN.m

Apoio 2 → X_2 = -4,5*2*1 = -9 kN.m

DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE CARGA - Consultar Tabela 1. Cargas distribuídas.

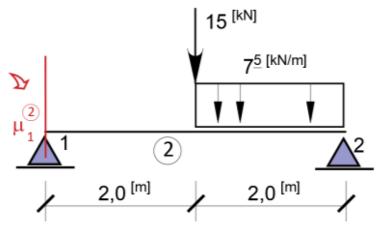
Fator de carga vão 1



$$\mu_2^1 = \frac{qs^2}{24.l}.(2.l^2 - s^2) = \frac{7,5 * 3^2.(2 * 6^2 - 3^2)}{24*6} = 29,53$$

$$\mu_2^1 = \frac{P.a.b}{6\times l}.(a + l) = \frac{13*4,5*1,5}{6\times 6}(4,5 + 6) = 25,59$$

Fator de carga vão 2



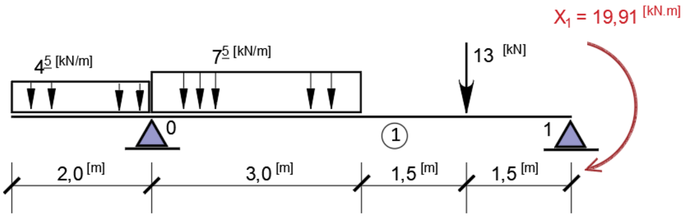
$$\mu_2^1 = \frac{qs^2}{24.l}.(l. + a)^2 = \frac{7,5 * 2^2.(4 + 2)^2}{24*4} = 11,25$$

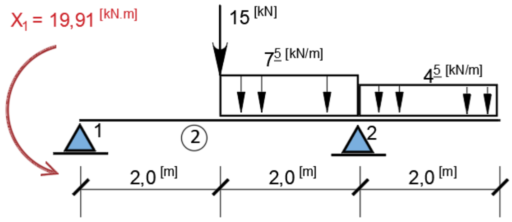
$$\mu_2^1 = \frac{P.a.b}{6\times l}.(b + l) = \frac{15*2*2}{6*4}(2 + 4) = 15$$

CÁLCULO DO MOMENTO NO APOIO INTERNO (X_1).

$$\ell_1 . X_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) . X_1 + \ell_2 . X_2 = -6(\mu_2^1 + \mu_1^2)$$

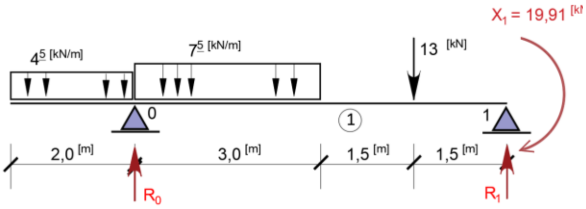
$6 \times (-9) + 2(6+4) . X_1 + 4 \times (-9) = -6(29{,}53 + 25{,}59 + 11{,}25 + 15)$
$-54 + 20 . X_1 - 36 = -6 \times (81{,}37)$
$X_1 = -19{,}91$ kN.m





→ CÁLCULO DAS REAÇÕES DE APOIO

Para vão 1:



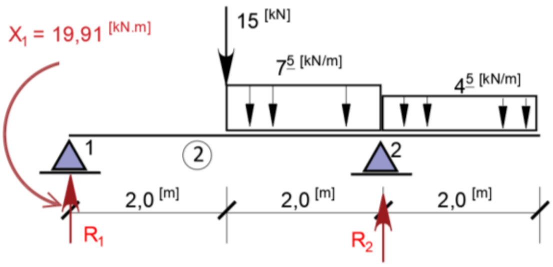
$\oplus \sum M_0 = 0$

$19{,}91 + 13*4{,}5 + 7{,}5*3{,}0*1{,}5 - 4{,}5*2{,}0*1{,}0 - R_1 * 6 = 0$
$R_1 = 17{,}19$ kN

$\uparrow \oplus \sum V = 0$

$R_0 + 17{,}19 - 4{,}5*2 - 7{,}5*3{,}0 - 13 = 0$
$R_0 = 27{,}31$ kN

Para vão 2:



$\oplus \sum M_1 = 0$

$-19{,}91 + 15*2{,}0 + 7{,}5*2{,}0*3{,}0 + 4{,}5*2{,}0*5{,}0 - R_2 * 4{,}0 = 0$
$R_2 = 25{,}02$ kN

$\uparrow \oplus \sum V = 0$

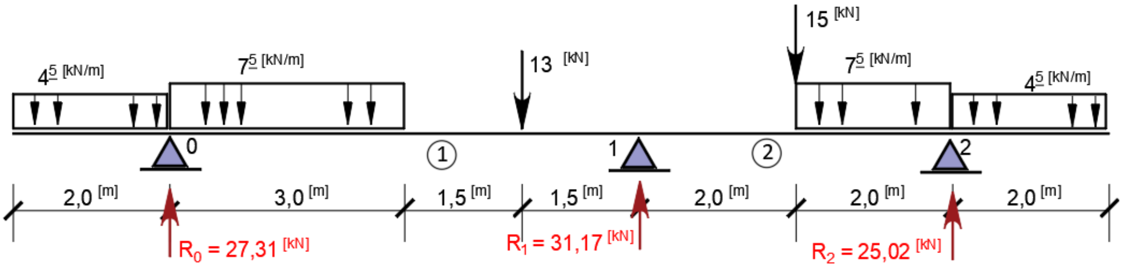
$R_1 + 25{,}02 - 15 - 7{,}5*2{,}0 - 4{,}5*2{,}0 = 0$
$R_1 = 13{,}98$ kN

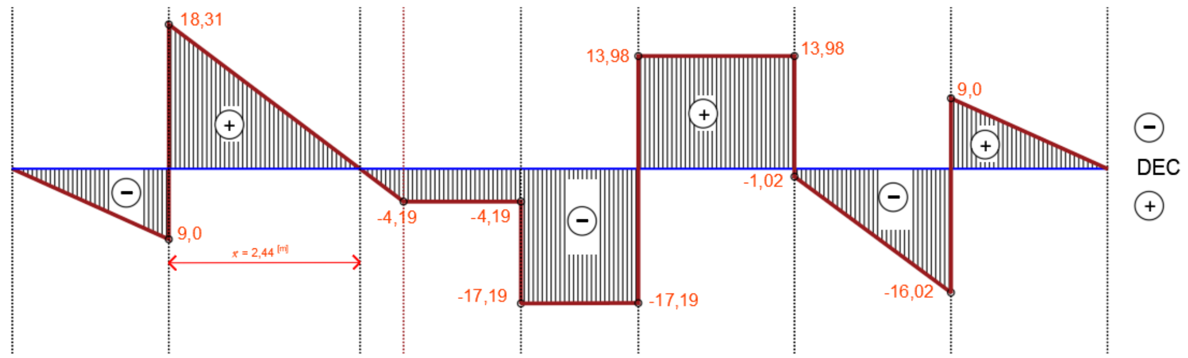
$R_0 = 27{,}31$ kN

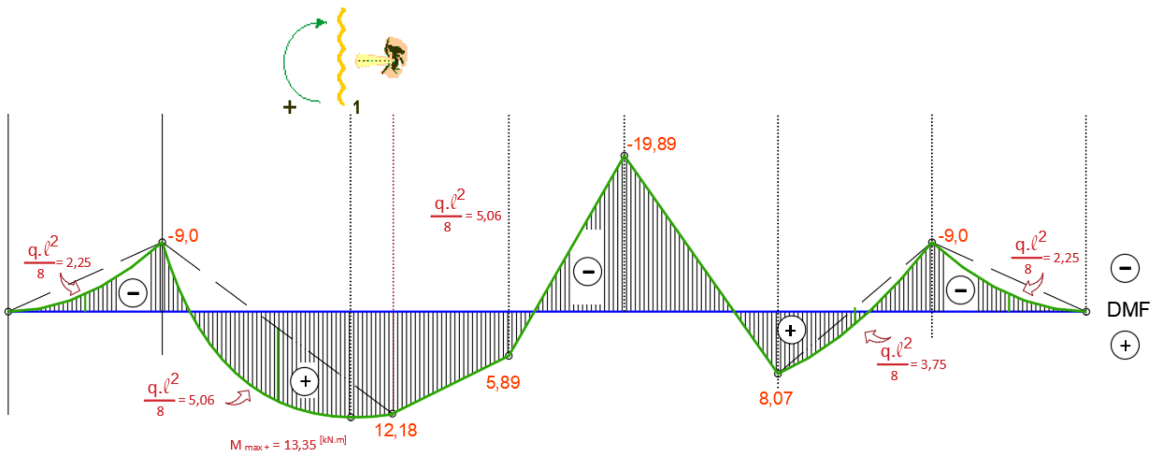
$R_1 = 17{,}19 + 13{,}98 = 31{,}17$ kN

$R_2 = 25{,}02$ kN

DIAGRAMA DOS ESFORÇOS: Após cálculo das reações, calcula-se então os esforços seccionais (Esforço Cortante e Momento Fletor).



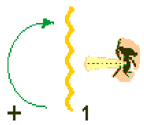




→DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO POSITIVO

VÃO 1 (semelhança de triângulo)

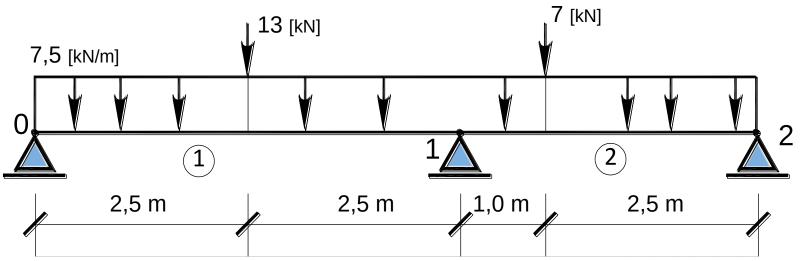
$$\frac{18{,}31}{x} = \frac{4{,}19}{3-x} \qquad 54{,}93 - 18{,}31.x = 4{,}19.x \qquad \rightarrow\ x = 2{,}44\ m$$



$$M_{max^+} = -4{,}5 * 2 * 3{,}44 + 27{,}31 * 2{,}44 - 7{,}5 * 2{,}44 * 1{,}22 = 13{,}35\ kN.m$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

❶



❷

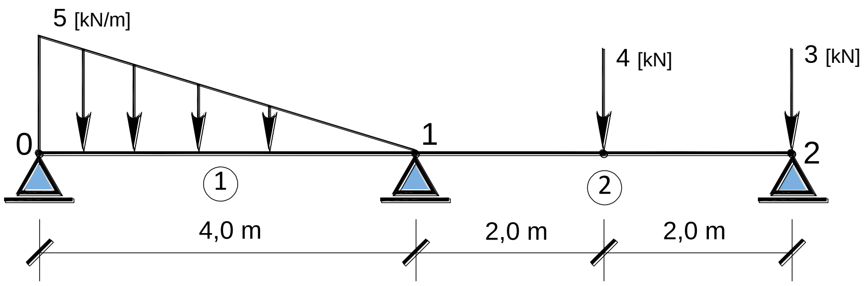


Figura 16.

❸

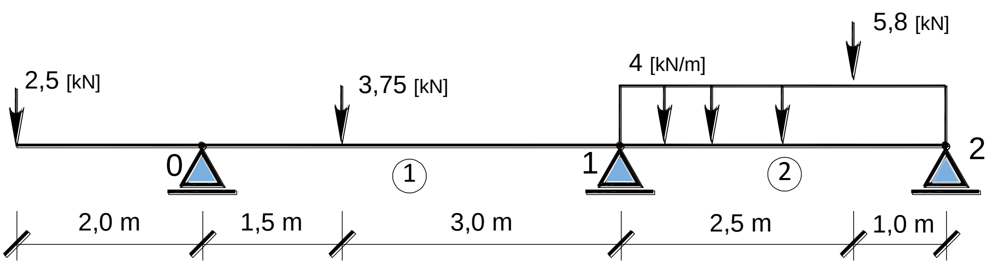


Figura 17.

❹

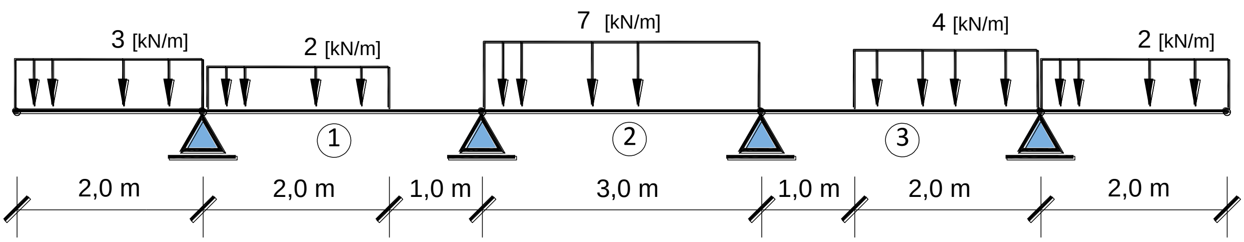


Figura 18.

❺

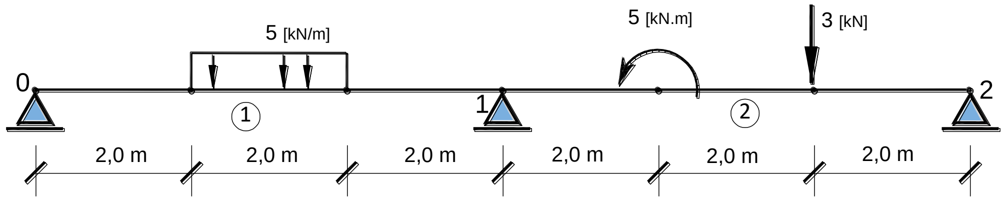


Figura 19.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anotações de Aula do Prof. **Borja**
- http://www.lami.pucpr.br/cursos/estruturas
- SILVA, L.F. Cálculo dos esforços internos e deflexões de vigas sobre base elástica não linear usando o método da flexibilidade. Dissertação. Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas. UFOP. Ouro Preto-MG, 2004.