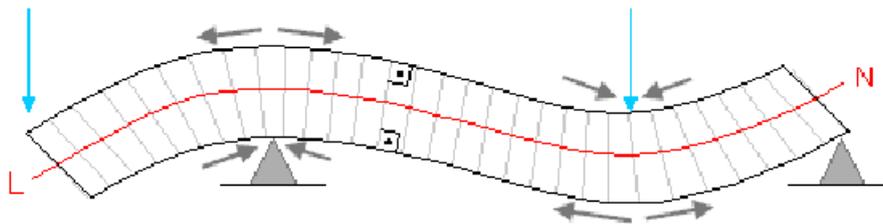


## TENSÕES DE FLEXÃO E DE CISALHAMENTO EM VIGAS



### Notas de Aula:

- Edilberto Vitorino de Borja

## 1. MOMENTO DE INÉRCIA – Aspectos Gerais

### 1.1. Momento de Inércia de Massa

O conceito de Momento de Inércia, em termos práticos, pode ser definido como sendo “a resistência que um corpo (em rotação) apresenta a uma mudança em sua velocidade de giro”. Alguns autores costumam dar a esse conceito a denominação de Inércia Rotacional. O momento de inércia desempenha, na rotação, um papel equivalente ao da massa no movimento linear.

Para fins comparativos, pode-se citar, como exemplo, o lançamento de duas pedras, de tamanhos distintos, por uma catapulta com aplicação da mesma força a cada uma. A pedra “pequena” terá uma aceleração muito maior que a da pedra “grande”.

De modo similar, se é aplicado um mesmo par de forças a uma roda com um momento de inércia pequeno e a outra com um momento de inércia grande, a velocidade de giro da primeira roda aumentará muito mais rapidamente que a da segunda. Por dedução, pode-se afirmar que o **momento de inércia de um objeto depende de sua massa e da distância da massa ao seu eixo de rotação** (eixo considerado).

Considere dois volantes de massas iguais (1 kg), como ilustrado na Figura 1.

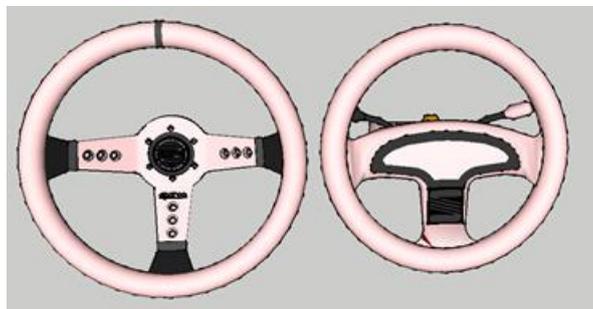


Figura 1. Volantes de massas iguais.

O volante da esquerda tem sua massa distribuída distante do seu eixo de giro, bem como o volante da direita tem sua massa distribuída próximo ao seu eixo de giro. Desse modo, pode-se concluir que o volante da direita possui um momento de inércia **menor**.

O momento de inércia de um corpo não é uma quantidade única e fixa. Se um objeto é girado em torno de eixos diferentes, também terá momentos de inércia diferentes, uma vez que a distribuição de sua massa em relação ao novo eixo é normalmente distinta do que era no anterior.

## 1.2. Momento de Inércia de Massa de uma placa retangular

Para determinação do momento de inércia de placa retangular, considera-se a placa delgada de massa  $M$  e lados  $a$  e  $b$  relativo ao eixo que passa pela placa, como ilustrado na Figura 2.

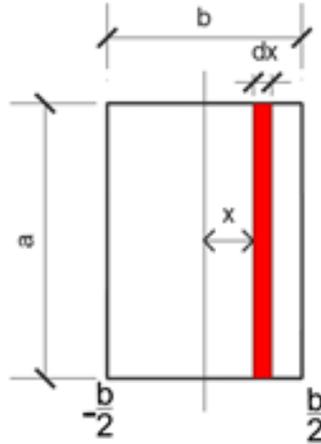


Figura 2. Placa retangular delgada de massa  $M$ .

Evidencia-se nessa figura um pequeno elemento de massa, cuja distância ao eixo de rotação vertical é de  $x$ . O elemento é um retângulo de comprimento  $a$  de largura  $dx$ . A massa deste retângulo é:

$$dm = \frac{M}{a \cdot b} \cdot a \cdot dx$$

onde:  $\frac{M}{a \cdot b} \rightarrow$  massa da placa por unidade de área

$a \cdot dx \rightarrow$  área do retângulo

Ao se multiplicar a massa da placa por unidade de área pela área do retângulo, tem-se a massa desse retângulo. Desse modo,

$$dm = \frac{M}{b} \cdot dx$$

Como Momento de Inércia se define como sendo “a área vezes o quadrado da distância” ao eixo considerado, para o retângulo em destaque, temos que o momento de inércia é igual a:

$$I = \frac{M}{b} \cdot dx \cdot x^2 = \frac{M}{b} \cdot x^2 \cdot dx$$

Para a placa retangular, aplicamos a integral variando  $x$  de  $(\frac{b}{2}$  até  $-\frac{b}{2})$ :

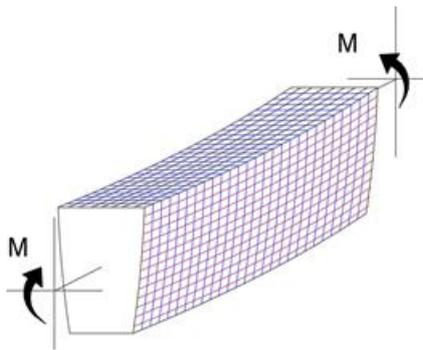
$$I_c = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{M}{b} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{M}{b} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{M}{b} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{M}{b} \cdot \left[ \frac{(\frac{b}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{b}{2})^3}{3} \right] =$$

$$I_c = \frac{M}{b} \cdot \left[ \frac{b^3}{8 \times 3} + \frac{b^3}{8 \times 3} \right] = \frac{M}{b} \cdot \frac{b^2}{12} =$$

$$I_c = \frac{1}{12} \cdot M \cdot b^2 \quad \dots \quad \text{Equação 1.}$$

### 1.3. Momento de Inércia de área

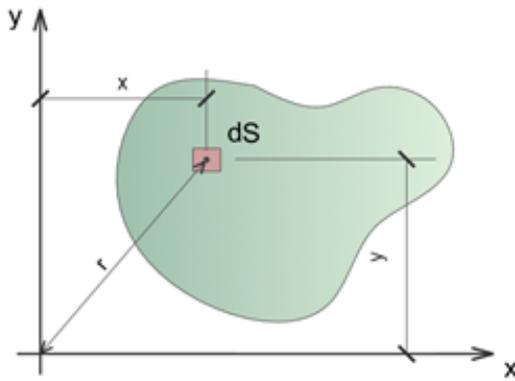
Momento de Inércia de Área ou Momento de Segunda Ordem de Área é uma propriedade de uma seção plana de um corpo, que tem relação com a resistência à deformação. O momento de inércia de uma área tem origem sempre que é feita a relação entre a tensão normal,  $\sigma$  (sigma), ou por força por unidade de área que atua na seção transversal de uma viga elástica, e o momento externo aplicado  $M$ , que causa curvatura da viga, como ilustrado na Figura 3.



**Figura 3.** Curvatura de viga (fletida) submetida a momento fletor externo aplicado.

Apesar da semelhança em formulação e em alguns teoremas, não deve ser confundido com momento de inércia de massa, que é usado no estudo da rotação de corpos rígidos. É comum o mesmo símbolo ( $I$ ) para ambos os temas, mas a distinção fica normalmente clara no contexto e nas unidades físicas. Em Engenharia, é usual o emprego da expressão “momento de inércia” para designar o momento de inércia de área.

Seja, conforme Figura 4, uma superfície plana genérica de área  $S$  e um sistema de coordenadas ortogonais  $xy$ . Os momentos de inércia em relação a cada eixo são dados por:



$$I_x = \int y^2 \cdot ds$$

$$I_y = \int x^2 \cdot ds$$

**Figura 4.** Placa de superfície genérica de área  $S$ .

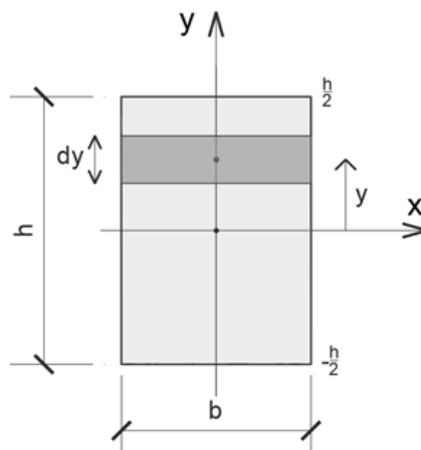
Note que a derivada neste caso é em relação à ( $ds$ ), ou seja, a derivada é em função da área, e não da massa como visto anteriormente. Em algumas literaturas se encontra também a notação conforme as equações 2 e 3:

$$I_x = \int y^2 \cdot da \quad \dots \quad \text{Equação 2.}$$

$$I_y = \int x^2 \cdot da \quad \dots \quad \text{Equação 3.}$$

#### 1.4. Momento de Inércia de área de placa retangular

Tomamos uma derivada de área (Figura 5), o elemento é um retângulo de comprimento  $dy$  e a de largura  $b$ .



**Figura 5.** Momento de Inércia de Área de placa retangular.

A área desse retângulo é dada por:

$$da = b \cdot dy$$

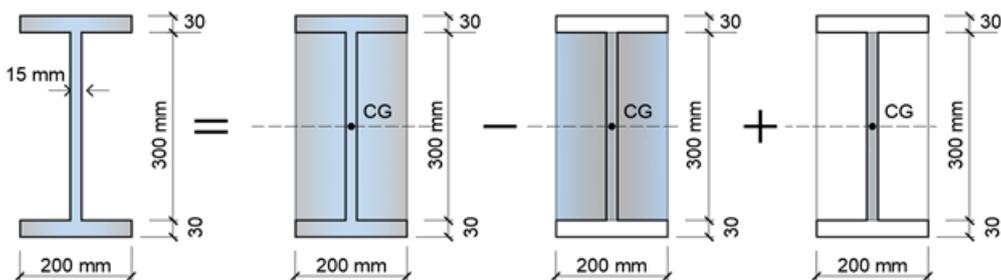
$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \left[ \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3} \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \dots \quad \text{Equação 4.}$$

Pode-se observar que para o desenvolvimento da equação para Momento de Inércia de área, a derivada da área é dada em função de ( $ds$ ), que se utiliza em dimensionamento de estruturas que são sujeitas a deformação.

### 1.5. Momento de Inércia de figuras de áreas compostas

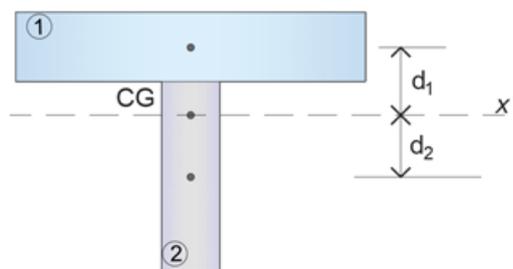
Consideremos uma área composta  $A$  formada de várias componentes  $A_1, A_2, etc.$  Como a integral que representa o momento de inércia de  $A$  pode ser subdividida em integrais calculadas sobre  $A_1, A_2, etc.$ , o momento de inércia  $A$ , em relação a um eixo dado, poderá ser obtido somando-se os momentos de inércia das áreas  $A_1, A_2, etc.$ , em relação ao mesmo eixo, conforme ilustra a Figura 6.



**Figura 6.** Momento de inércia de uma figura composta em relação a um mesmo eixo de simetria.

$$I_{x'} = I_1 - I_2 + I_3$$

Caso a figura composta não tenha como eixo de simetria o eixo que se deseja determinar o momento de inércia (Figura 7), aplica-se, nesse caso, o “teorema dos eixos paralelos”, conforme a Equação 5.



**Figura 7.** Momento de inércia de uma figura composta em relação a um eixo qualquer.

$$I_{x'} = (I_1 + A \times d_1^2) + (I_2 + A \times d_2^2) \quad \dots \quad \text{Equação 5.}$$

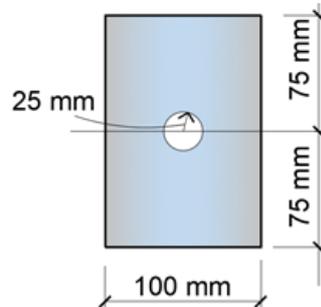
### 1.6. Procedimentos para Análise – Resumo Geral

O momento de inércia de uma área composta em relação a um eixo de referência pode ser determinado utilizando-se os procedimentos a seguir:

- A partir de um esboço, divida a área nas partes que a compõe e indique a distância perpendicular do centroide de cada parte em relação ao eixo de referência;
- Deve-se determinar os momentos de inércia de cada uma das partes do composto em relação aos eixos que passam pelos seus centroides, que são paralelos ao eixo de referência.
- Se o eixo que passa pelo centroide de uma das partes não coincide com o eixo de referência, deve-se aplicar o teorema dos eixos paralelos,  $I = \bar{I} + A \cdot d^2$ , para determinar seu momento de inércia em relação ao eixo de referência;
- O momento de inércia de toda a área em relação ao eixo de referência é determinado pelo somatório dos resultados de suas partes constituintes;
- Caso uma parte do composto tenha uma “área faltante”, o momento dessa parte é encontrado subtraindo-se o momento de inércia da área faltante do momento de inércia da área composta total, incluindo a área que falta.

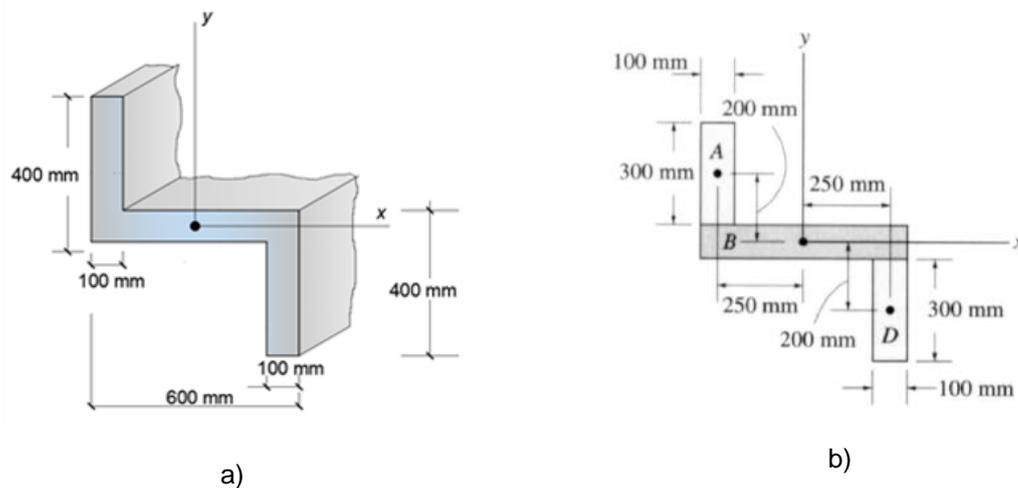
## Exercícios

1. Calcule o momento de inércia da área composta ilustrada na Figura 8 em relação ao eixo  $x'$ .



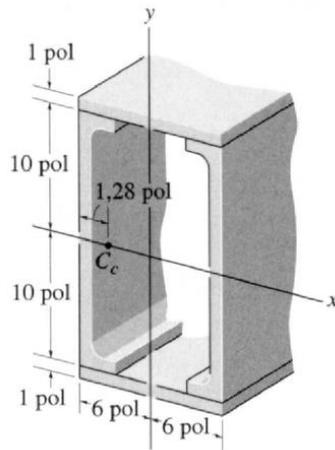
**Figura 8.** Figura composta.

2. Determine os momentos de inércia da área da seção reta da viga mostrada na Figura 9 em relação aos eixos  $x$  e  $y$  que passam pelo seu centroide.



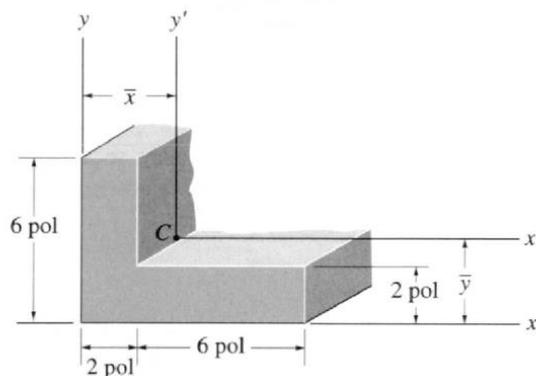
**Figura 9.** Viga com geometria no formato "z".

3. A viga ilustrada na Figura 10 é construída a partir de dois perfis U e duas chapas de cobertura. Se cada perfil tem área de seção reta igual a  $A_c = 76 \text{ cm}^2$  e momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa pelo próprio centroide,  $C_c$ , igual a  $(\bar{I}_x)C_c = 14526 \text{ cm}^4$ , determine o momento de inércia da viga em relação ao eixo  $y$ .



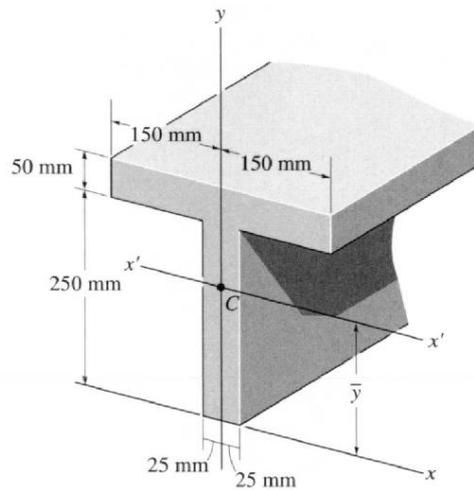
**Figura 10.** Viga composta de dois perfis "U" fixados por duas chapas.

4. Localize o centroide  $\bar{y}$  da seção reta para o perfil em ângulo ilustrado na Figura 11. Em seguida, determine o momento de inércia  $\bar{I}_{x'}$  em relação ao eixo  $x'$  que passa pelo centroide.
5. Localize o centroide  $\bar{x}$  da seção reta para o perfil em ângulo da Figura 11. Em seguida, determine o momento de Inércia  $\bar{I}_{y'}$ , em relação ao eixo  $y'$  que passa pelo centroide.



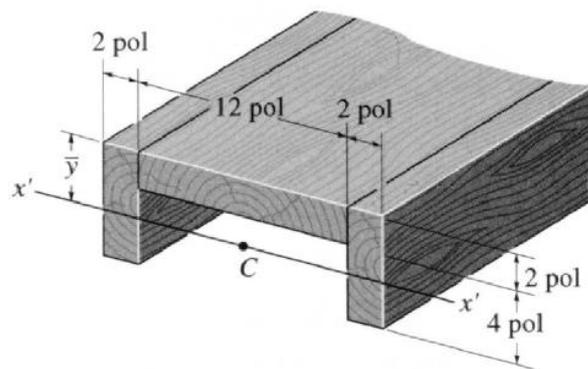
**Figura 11.** Perfil em ângulo.

6. Determine  $\bar{y}$ , que localiza o eixo  $x'$  que passa pelo centroide da área de seção transversal da viga  $T$  (ilustrada na Figura 12), e encontre os momentos de inércia  $\bar{I}_{x'}$  e  $\bar{I}_{y'}$ .



**Figura 12.** Viga em "T".

7. Localize o centroide  $\bar{y}$  da área da seção transversal do perfil na Figura 13 e determine o momento de inércia em relação ao eixo  $x'$  que passa pelo centroide.



**Figura 13.** Viga composta.

## 2. TENSÃO (para qualquer elemento estrutural)

Resposta dos elementos estruturais (lajes, vigas, pilares, fundações), aos esforços internos aplicados - força normal ( $N$ ) que dá origem à tração ou à compressão, momento fletor ( $M$ ) que dá origem à flexão, momento torçor ( $Mt$ ) que dá origem à torção e força cortante ( $V$ ) que dá origem ao cisalhamento.

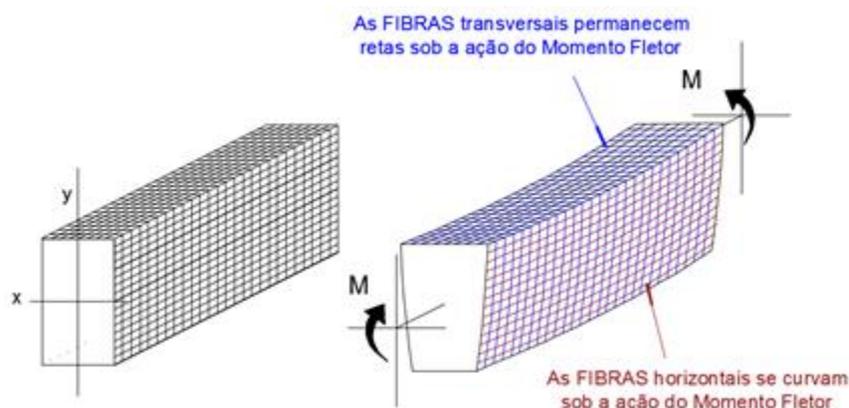
A fórmula geral para qualquer que seja a tensão (Normal, flexão, torção ou cisalhamento) é:

$$\text{Tensão} = \frac{\text{Esforço Interno Aplicado}}{\text{Característica Geométrica da Seção Transversal}}$$

|   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Esforço interno:</li></ul>                                | <b>Normal;</b><br><b>Momento Fletor;</b><br><b>Momento Torçor;</b><br><b>Esforço Cortante</b>                                |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Característica geométrica da seção transversal:</li></ul> | <b>Área (A);</b><br><b>Momento de Inércia (I);</b><br><b>Momento Estático (Q);</b><br><b>Base (b);</b><br><b>Altura (h);</b> |

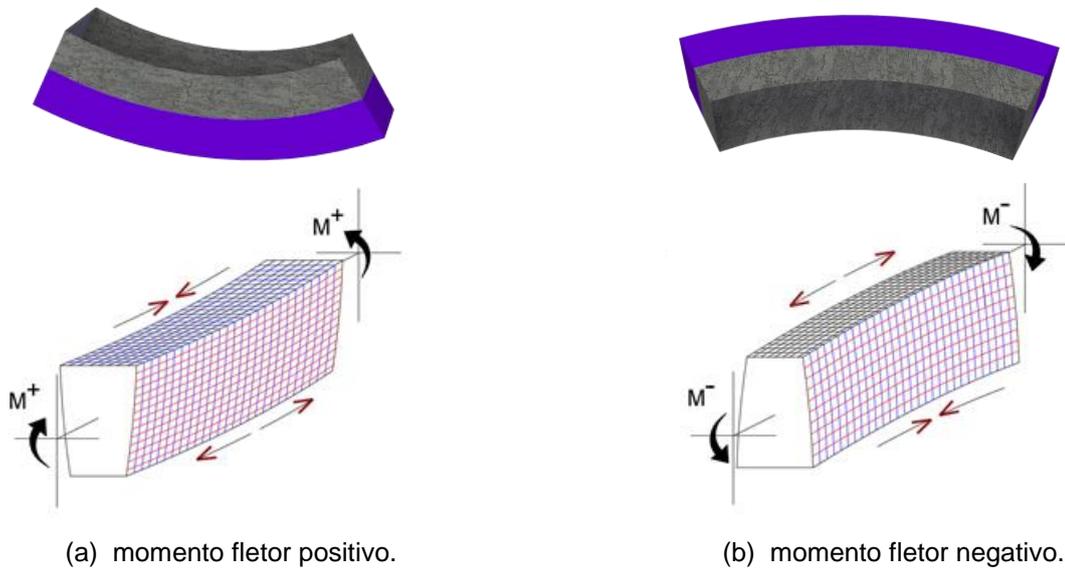
### 2.1. Tensão de Flexão em uma viga

Em vigas, quando submetidas a esforços externos (carregamentos transversais com relação ao seu eixo longitudinal), ocorrem deformações de flexão (Figura 14) devido ao esforço de momento fletor, surgindo desta forma as tensões de flexão.



**Figura 14.** Viga submetida a momento fletor positivo.

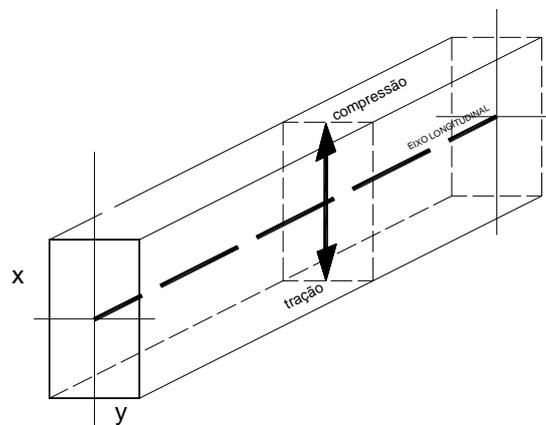
As fibras superiores tendem a se aproximar (tensões de compressão) e as fibras inferiores tendem a se afastar (tensões de tração), quando ocorre o momento fletor positivo e o contrário, quando ocorre o momento fletor negativo, conforme ilustrado nas Figuras 15 (a) e (b), respectivamente.



**Figura 15.** Tensões de flexão (compressão e tração) em vigas.

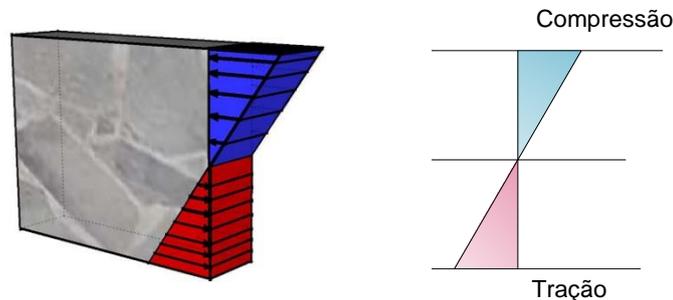
## 2.2. Diagrama de Tensões de Flexão Resultante

Ao analisarmos a Figura 15(a), observamos que a tensão máxima de compressão ocorre na fibra superior e a tensão máxima de tração ocorre na fibra inferior da viga, conforme ilustra a Figura 16.



**Figura 16.** Fibra Central.

Colocando-se os esforços de compressão nas fibras superiores, tração nas fibras inferiores e ainda nenhum esforço na fibra central, pode-se obter o diagrama de tensões, conforme ilustrado na Figura 17 (**lembrando que a viga está submetida a esforço de momento fletor positivo**).



**Figura 17.** Diagrama de tensões de flexão.

### 2.3. Hipótese fundamental da teoria da Flexão - LEI DE NAVIER

As seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão. Essa conclusão é válida para vigas de qualquer material, seja ele elástico ou inelástico, linear ou não-linear.

As propriedades dos materiais, assim como as dimensões, devem ser simétricas em relação ao plano de flexão.

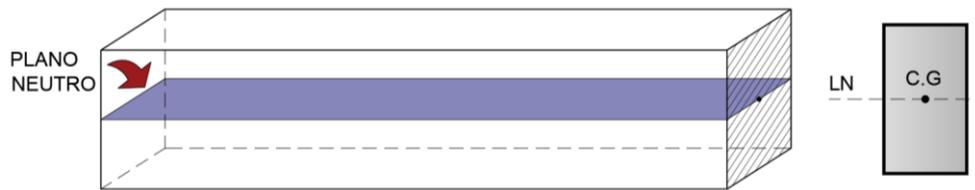
As linhas longitudinais na parte inferior da viga são alongadas (traçadas), enquanto aquelas na parte superior são diminuídas (comprimidas).

### 2.4. Superfície Neutra

É uma superfície em algum lugar entre o topo e a base da viga em que as linhas longitudinais não mudam de comprimento.

**Linha Neutra** – é a interseção da superfície neutra com qualquer plano de seção transversal. Na LN, não há esforço, nem de tração, nem de compressão.

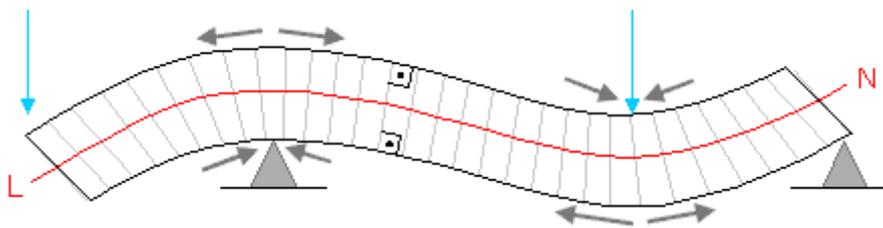
Para materiais homogêneos (aço, madeira, concreto simples), a LN passa no centro de gravidade (CG) da seção transversal (Figura 18).



**Figura 18.** Identificação da superfície e linha neutra.

## 2.5. Análise das distâncias das fibras em relação a L.N.

Façamos agora a análise das distâncias entre as seções transversais e conseqüentemente dos esforços nas fibras superiores, inferiores e na LN em alguns pontos da viga ilustrada na Figura 19.



**Figura 19.** Seções planas em vigas.

|                          | Sobre o apoio                   | Meio do vão                     |
|--------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| <b>Fibras superiores</b> | Fibras se afastam: tração       | Fibras se aproximam: compressão |
| <b>Linha Neutra</b>      | Não há alteração                | Não há alteração                |
| <b>Fibras inferiores</b> | Fibras se aproximam: compressão | Fibras se afastam: tração       |

## 2.6. Determinação das Tensões de Flexão

Esta tensão é a resposta da viga decorrente do esforço de flexão (Momento Fletor). Como consequência desse esforço, a viga se deforma, fletindo, sobre seu eixo longitudinal.

## 2.7. Tensões de Flexão de viga sujeita a Momento Fletor ( $M$ ) Positivo.



Figura 20. Diagrama de tensões de flexão (viga de seção transversal retangular).

### Convenção das tensões de flexão:

- tensão de flexão/compressão: positiva;
- tensão de flexão/tração: negativa.

#### Fórmula Geral da Tensão de flexão

$$\sigma_f = \frac{M \times y}{I_{LN}}$$

Onde:

$\sigma_f$ : tensão de flexão ( $\sigma_{fc}$   $\sigma_{ft}$ );

$M$  : Momento fletor na seção considerada;

$y$ : distância da LN à fibra considerada;

$I_{LN}$ ; momento de Inércia em relação à Linha Neutra

## 2.8. Exemplo – Determinação das Tensões de Flexão

Determinar as tensões de flexão nas fibras 1e 2, superior e inferior dos pontos  $D$  e  $E$  da viga ilustrada na Figura 21 a seguir.

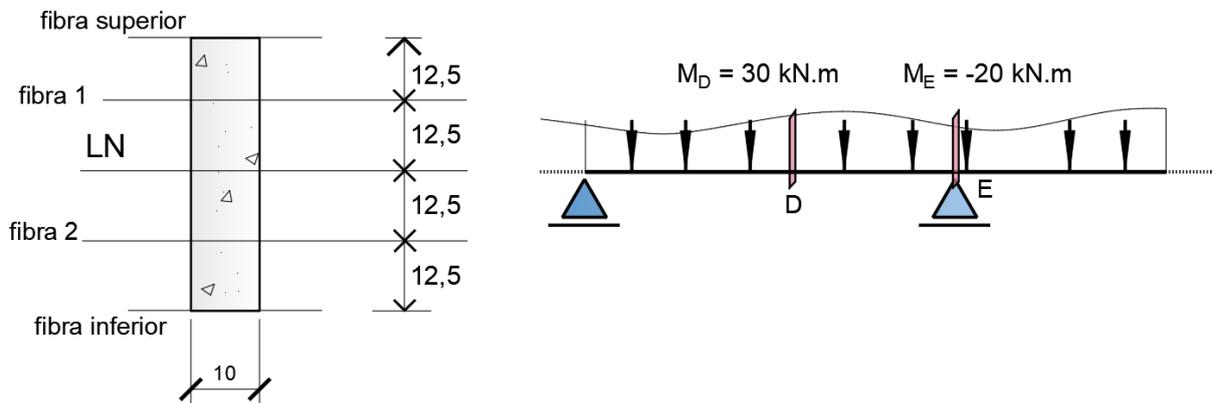


Figura 21. Momentos Fletores nas seções *D* e *E* e seção transversal de viga.

➔ **Resolução:**

▪ **Ponto *D*:**

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| Momento de Inércia (em rel. à LN): | $I_{LN} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \times 50^3}{12} = 104167 \text{ cm}^4$                       |
| Fibras acima da LN:                |   |
| Fibra 1                            | $\sigma_f = \frac{M \cdot y}{I_{LN}} = \frac{30 \times 12,5 \times (100)}{104167} = 0,36 \text{ kN/cm}^2$ |
| Fibra Superior                     | $\sigma_f = \frac{M \cdot y}{I_{LN}} = \frac{30 \times 25 \times (100)}{104167} = 0,72 \text{ kN/cm}^2$   |

Obs.: o **valor 100** na fórmula acima serve para transformar o momento fletor de kNm para kNcm. O resultado foi positivo, logo a tensão de flexão na fibra superior no ponto *D* (meio do vão) é de compressão.

|                      |   |
|----------------------|---|
| Fibras abaixo da LN: |   |
| Fibra 2              | $\sigma_f = \frac{M \cdot y}{I_{LN}} = \frac{30 \times (-12,5) \times (100)}{104167} = -0,36 \text{ kN/cm}^2$ |
| Fibra Inferior       | $\sigma_f = \frac{M \cdot y}{I_{LN}} = \frac{30 \times (-25) \times (100)}{104167} = -0,72 \text{ kN/cm}^2$   |

O resultado foi negativo, logo a tensão de flexão na fibra inferior no ponto *D* (meio do vão) é de tração.

Diagrama das tensões de flexão no ponto *D* (Figura 22):

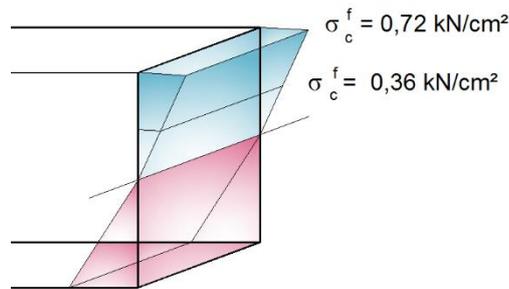


Figura 22. Diagrama das tensões de flexão no ponto *D*.

▪ **Ponto E:**

| Fibras acima da LN: |   |
|---------------------|---|
| Fibra 1             | $\sigma_f = \frac{M.y}{I_{LN}} = \frac{(-20) \times 12,5 \times (100)}{104167} = -0,24 \text{ kN/cm}^2$ |
| Fibra Superior      | $\sigma_f = \frac{M.y}{I_{LN}} = \frac{(-20) \times 25 \times (100)}{104167} = -0,48 \text{ kN/cm}^2$   |

Obs.:O resultado foi negativo, logo a tensão de flexão na fibra superior no ponto *E* (apoio) é de tração.

| Fibras abaixo da LN: |   |
|----------------------|---|
| Fibra 2              | $\sigma_f = \frac{M.y}{I_{LN}} = \frac{(-20) \times (-12,5) \times (100)}{104167} = 0,24 \text{ kN/cm}^2$ |
| Fibra Inferior       | $\sigma_f = \frac{M.y}{I_{LN}} = \frac{(-20) \times (-25) \times (100)}{104167} = 0,48 \text{ kN/cm}^2$   |

O resultado foi positivo, logo a tensão de flexão na fibra inferior no ponto *E* (apoio) é de compressão.

## 2.9. Verificação da Estabilidade

Para **não haver rompimento, ou para que haja estabilidade**, é necessário que a seguinte inequação seja verificada:

$$\text{Tensão admissível} \geq \text{Tensão máxima} \cdot \text{Coeficiente de segurança}$$

Portanto, para que se verifique a estabilidade à flexão de uma viga, as inequações abaixo devem ser obedecidas, tanto para a seção de Momento fletor máximo positivo como para a seção de Momento fletor máximo negativo.

| Fórmula  |
|--|
| $\bar{\sigma}_{f_c} \geq \sigma_{f_c} \text{ máx. atuante} \times 1.4$ |
| $\bar{\sigma}_{f_t} \geq \sigma_{f_t} \text{ máx. atuante} \times 1.4$ |

- *Observação:*

A barra acima dos símbolos de tensão de flexão ( $\bar{\sigma}_f$ ), indica que esta tensão é uma tensão admissível.

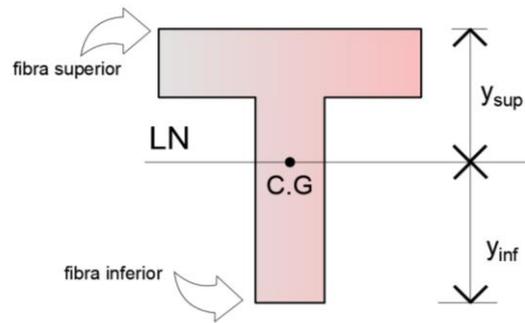
Na verificação da estabilidade à flexão, o que interessa são as tensões máximas de flexão (tração ou compressão).

## 2.10. Tensão Máxima de Flexão

| Fórmula   |
|---|
| $\sigma_{f_t \text{ ou } c} = \frac{M.y}{I_{LN}}$ |

As tensões máximas de flexão ocorrem nas seções de momento fletor máximo positivo e negativo nas fibras superior e inferior da seção transversal de uma determinada viga.

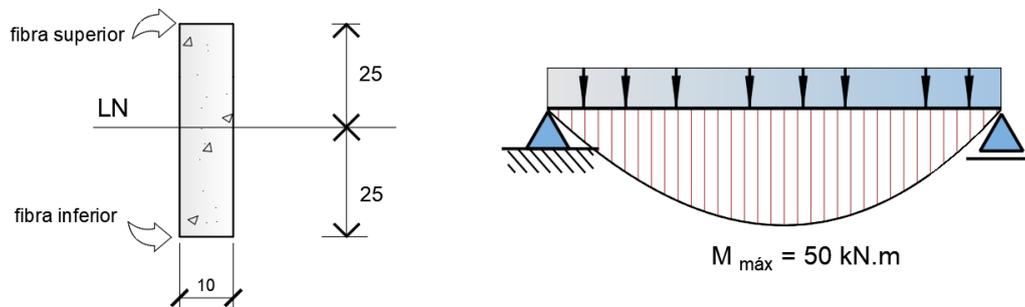
As fibras superiores e inferiores são definidas a partir da LN ( $y_{sup}$  e  $y_{inf}$ ), que passa pelo centro de gravidade da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 23.



**Figura 23.** Viga “T”.

## 2.11. Exemplo – Verificação da estabilidade à flexão (de uma viga)

Analise a Figura 24.



**Figura 24.** Momento Fletor máximo e seção transversal de viga isostática.

Com base nas informações contida nessa figura e nas tensões admissíveis de flexão de tração e de compressão dadas a seguir, verificar a sua estabilidade.

$$\bar{\sigma}_{f_c} = 2,00 \text{ kN/cm}^2 \quad \bar{\sigma}_{f_t} = 1,75 \text{ kN/cm}^2$$

**Resolução:**

Características geométricas da seção transversal – Momento de Inércia (seção retangular):

$$I_{LN} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \times 50^3}{12} = 104167 \text{ cm}^4$$

- Flexão:

| Fórmula  |
|--|
| $\sigma_{f_{T \text{ ou } C} \text{ máx}} = \frac{M_{\text{máx}}^{+ \text{ ou } -} \times y_{\text{sup. ou inf}}}{I_{LN}}$ |

Para  $M_{\text{máx}}^{+} = 50 \text{ kN}$

**Fibras superiores:**

$$\sigma_{f_{T \text{ ou } C} \text{ máx}} = \frac{M_{\text{máx}}^{+} \times y_{\text{sup}}}{I_{LN}} = \frac{(50 \times 100) \times 25}{104167} = 1,20 \text{ kN/cm}^2 \text{ (compressão)}$$

$$\sigma_{f_{C} \text{ máx}} = 1,20 \text{ kN/cm}^2$$

**Fibras inferiores:**

$$\sigma_{f_{T \text{ ou } C} \text{ máx}} = \frac{M_{\text{máx}}^{+} \times y_{\text{inf}}}{I_{LN}} = \frac{(50 \times 100) \times (-25)}{104167} = -1,20 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tração)}$$

$$\sigma_{f_{T} \text{ máx}} = -1,20 \text{ kN/cm}^2$$

**Verificação** (utiliza-se os valores das tensões em módulo, pois não teria sentido comparar uma tensão máxima com valor negativo com uma tensão admissível que é sempre positiva).

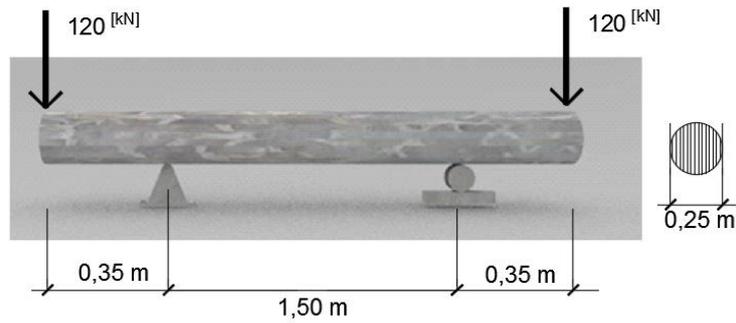
| Comparação        |   |
|-------------------|---|
| <b>Compressão</b> | $\bar{\sigma}_{fC} \geq \sigma_{fC \text{ máx}} \cdot 1,4 \Rightarrow 2,00 \geq 1,20 \cdot 1,4 \Rightarrow 2,00 \geq 1,68 \text{ verifica}$ |
| <b>Tração</b>     | $\bar{\sigma}_{fT} \geq \sigma_{fT \text{ máx}} \cdot 1,4 \Rightarrow 1,75 \geq 1,20 \cdot 1,4 \Rightarrow 1,75 \geq 1,68 \text{ verifica}$ |

### Conclusão

Como as inequações relativas à flexão se verificaram, chega-se a conclusão de que a viga é estável considerando-se a flexão.

### 2.12. Exemplo – determinação das Tensões de Flexão

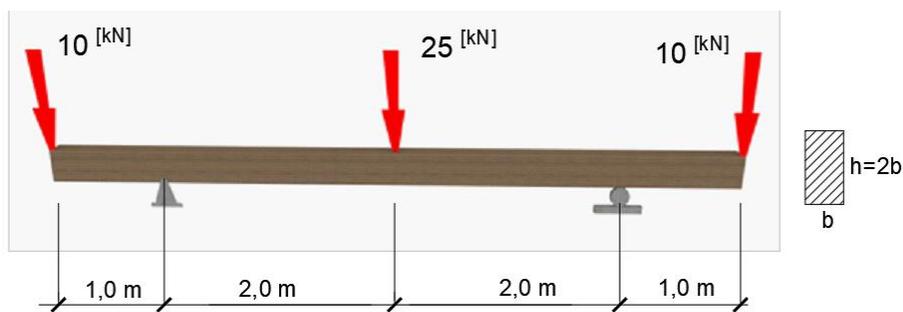
A viga representada na Figura 25 tem seção transversal circular constante. Determinar a tensão de flexão (Resposta:  $\sigma = 2,738 \text{ kN/cm}^2$ ).



**Figura 25.** Viga bi-apoiada de seção transversal circular.

### 2.13. Exemplo – determinação das tensões de Flexão

A viga representada na Figura 26 tem seção transversal constante, retangular com  $h = 2b$ . Determinar as dimensões  $h$  e  $b$  para as tensões máximas admissíveis de 12 MPa para à tração e 10 MPa para à compressão, de um certo tipo de madeira. (Resposta: mínimo 132 mm x 264 mm).

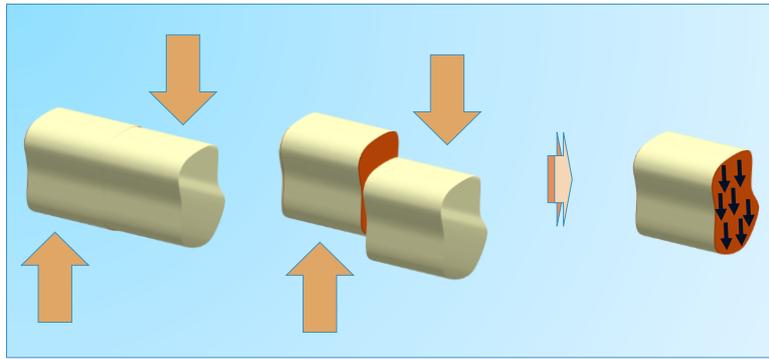


**Figura 26.** Viga bi-apoiada de seção transversal retangular com balanço nas extremidades.

## 3. TENSÃO DE CISALHAMENTO

Esta tensão é a resposta da viga decorrente do cisalhamento. O cisalhamento aparece em uma viga devido ao esforço interno aplicado - força cortante ( $V$ ).

A tensão de cisalhamento é paralela ao plano da seção transversal, ao contrário da tensão de flexão que é normal ao plano da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 27.



**Figura 27.** Tensões de Cisalhamento.

A tensão de cisalhamento é determinada segundo a equação dada abaixo:

| Fórmula                                       |
|---|
| $\tau = \frac{V}{b_w \times I_{LN}} \times Q$ |

Onde:

$\tau$ : tensão de cisalhamento.

**V**: força cortante na seção considerada.

**Q**: momento estático da área, definida pela fibra considerada, em relação à linha neutra.

**b<sub>w</sub>**: largura da seção transversal na fibra considerada.

**I<sub>LN</sub>**: momento de inércia em relação à Linha Neutra.

### 3.1. Momento Estático de Área – seção transversal retangular

Momento estático – produto entre área (A) e distância (d) = A x d.

A - Área compreendida entre a fibra analisada e a fibra superior.

d – Distância compreendida entre o centro de gravidade e a linha neutra.

|                                       |                                       |  |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
|                                       |                                       |  |
| $Q = (b \times \frac{h}{4}) \times d$ | $Q = (b \times \frac{h}{2}) \times d$ | $Q = (b \times \frac{3h}{2}) \times d$ |

### 3.2. Exemplo – determinação da tensão de cisalhamento.

Determinar as tensões cisalhantes nas fibras 1 e 2 e na fibra da LN na seção A da viga ilustrada na Figura 28 a seguir.

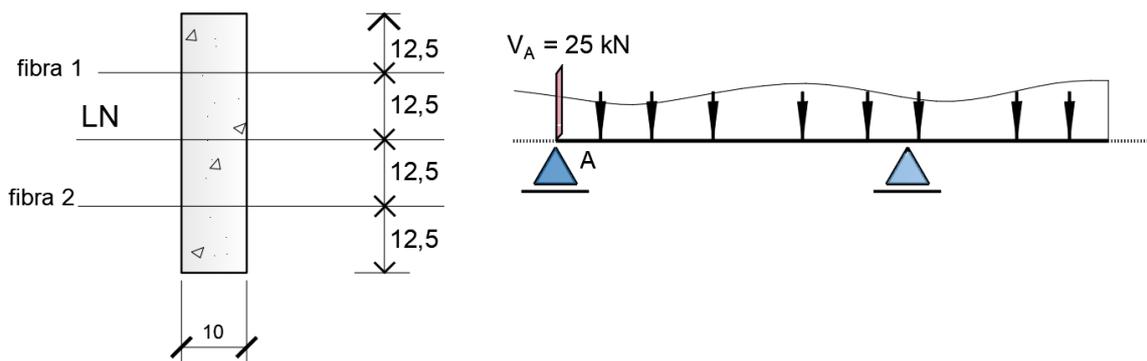


Figura 28. Esforço cortante (seção A) e dimensões da seção transversal de viga.

#### ▪ Seção A:

|          |  |
|----------|--|
| Fibra 1  | $\tau_1 = \frac{V_A \times Q_1}{b_w \times I_{LN}} = \frac{(25) \times ((10 \times 12,5) \times (18,75))}{10 \times \frac{10 \times 50^3}{12}} = 0,056 \text{ kN/cm}^2$    |
| Fibra LN | $\tau_{LN} = \frac{V_A \times Q_{LN}}{b_w \times I_{LN}} = \frac{(25) \times ((10 \times 25) \times (12,5))}{10 \times \frac{10 \times 50^3}{12}} = 0,075 \text{ kN/cm}^2$ |
| Fibra 2  | $\tau_2 = \frac{V_A \times Q_2}{b_w \times I_{LN}} = \frac{(25) \times ((10 \times 37,5) \times (6,25))}{10 \times \frac{10 \times 50^3}{12}} = 0,056 \text{ kN/cm}^2$     |

### Diagrama das tensões de cisalhamento na seção A (Figura 29).

Obs.: nas fibras superior e inferior a tensão de cisalhamento é nula.

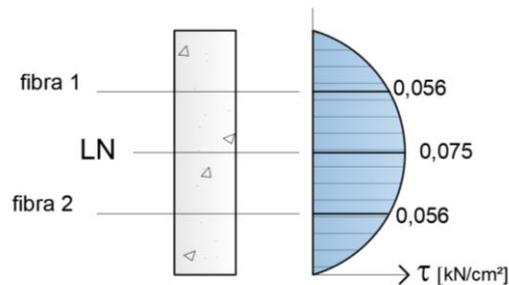


Figura 29. Diagrama das Tensões Cisalhantes na Seção A.

### 3.3. Verificação da estabilidade

Para **não haver rompimento, ou para que haja estabilidade**, é necessário que a seguinte inequação seja verificada:

| Fórmula  |
|--|
| $\text{Tensão admissível} \geq \text{Tensão máxima} \cdot \text{Coeficiente de segurança}$ |

#### Verificação da estabilidade de uma viga

Portanto, para que se verifique a estabilidade ao cisalhamento de uma viga, a inequação abaixo deve ser obedecida, para a seção de Força Cortante máxima.

| Fórmula                                  |
|--|
| $\bar{\tau} \geq \tau_{\max} \times 1,4$ |

#### Observação

A barra acima do símbolo de tensão de cisalhamento ( $\bar{\tau}$ ), indica que esta tensão é uma tensão admissível.

Na verificação da estabilidade ao cisalhamento, o que interessa é a tensão máxima de cisalhamento.

### 3.4. Tensão máxima de cisalhamento

| Fórmula                                       |
|---|
| $\tau = \frac{V}{b_w \times I_{LN}} \times Q$ |

Define-se o centro de gravidade (CG) da seção transversal da viga (Figura 30). Por este centro de gravidade passa a LN que define o momento de inércia em relação à LN ( $I_{LN}$ ). A partir da LN, define-se a largura da seção transversal em relação à LN ( $b_w$ ) e o momento estático em relação à LN ( $Q_{LN}$ ).

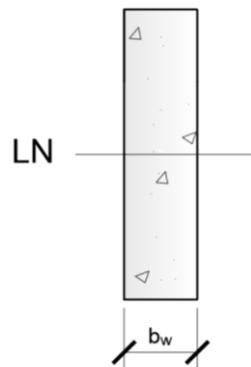


Figura 30. Seção transversal retangular de uma viga.

### 3.5. exemplo – DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO

Verificar a estabilidade da viga ilustrada na Figura 31 quanto a tensão de cisalhamento, conhecendo-se o diagrama do esforço cortante, dimensões da seção transversal e tensão admissível de cisalhamento.

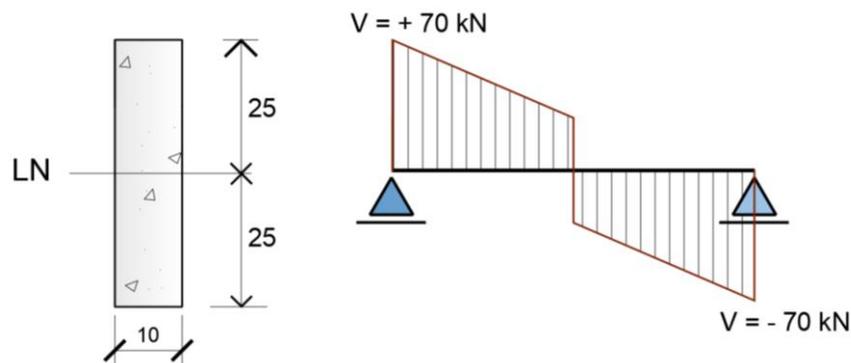


Figura 31. Diagrama Esforço Cortante e dimensões seção transversal.

Onde:

$$\bar{\tau} = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

Características geométricas da seção transversal:

$$b_w = 10 \text{ cm} ; I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \times 50^3}{12} = 104167 \text{ cm}^4 ; Q = \frac{b \times h^2}{8} = \frac{10 \times 50^2}{8} = 3125 \text{ cm}^4$$

As fórmulas acima são válidas somente para seção transversal retangular.

| Fórmula  |
|--|
| $\tau = \frac{V}{b_w \times I_{LN}} \times Q$  |
| $\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{b_w \times I_{LN}} \times Q = \frac{70 \times 3125}{10 \times 104167} = 0,21 \text{ kN/cm}^2$ |

Verificação:

**Cálculo**

$$\bar{\tau} \geq \tau_{\max} \cdot 1,4 \Rightarrow 0,25 \geq 0,21 \cdot 1,4 \Rightarrow 0,25 \geq 0,30 \text{ não verifica}$$

Conclusão:

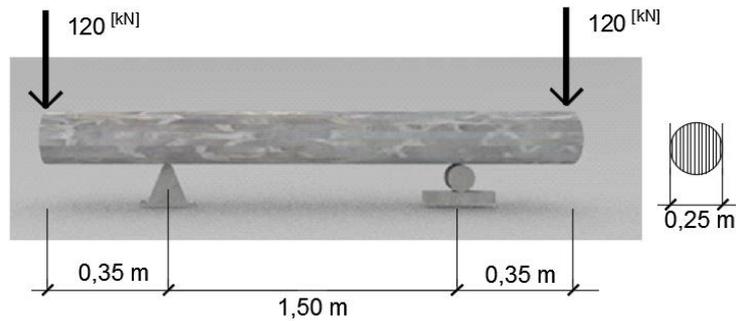
Como a inequação relativa ao cisalhamento não se verificou, chega-se à conclusão de que a viga não é estável considerando-se o cisalhamento.

### IMPORTANTE:

Para que uma viga seja estável, tanto as inequações relativas à flexão quanto à inequação relativa ao cisalhamento devem ser verificadas. Portanto se uma das inequações não for verificada, a viga "rompe".

### 3.6. Exemplo – determinação das tensões de cisalhamento

A viga representada na Figura 32 tem seção transversal circular constante. Determinar a tensão de cisalhamento (Resposta:  $\tau = 0,326 \text{ kN/cm}^2$ ).



**Figura 32.** Viga bi-apoiada de seção transversal circular.

#### 4. Revisão:

Para que uma estrutura qualquer seja estável, a seguinte inequação, válida para qualquer tipo de esforço, deve ser verificada:

$$\text{Tensão admissível} \geq \text{Tensão máxima} \cdot 1,4$$

A tensão admissível é uma característica do material, ou seja, cada material tem a sua tensão admissível para cada tipo de esforço.

A tensão máxima é uma relação entre o esforço interno máximo que dá origem a esta tensão e uma característica geométrica da seção transversal (área, momento de inércia, momento estático, etc.).

O esforço interno máximo é obtido através do cálculo e desenho dos diagramas dos respectivos esforços.

Para que seja possível o cálculo dos diagramas é necessário que se faça previamente o cálculo das reações de apoio da estrutura em questão.

#### **Resumindo**

- dados o carregamento e a geometria, calcula-se as reações de apoio;
- com as reações de apoio, faz-se o cálculo e desenho dos diagramas;
- com os diagramas, obtém-se os esforços internos máximos;
- a partir dos esforços internos máximos e com a geometria da seção transversal, calcula-se a tensão máxima;

- uma vez obtida a tensão máxima, faz-se a comparação com a tensão admissível (que é uma característica do material), levando-se em consideração também o coeficiente de segurança através da seguinte inequação:

$$\text{Tensão admissível} \geq \text{Tensão máxima} \cdot 1,4$$

Se a inequação for verificada, logo a estrutura é estável.